Was ist eigentlich...ein Ultrafilter?

und was kann man damit anstellen?

Peter Krautzberger

Institut für Mathematik, Freie Universität Berlin

„Was ist eigentlich...?“ Seminar, Freie Universität Berlin
Mai 2008

Freie Universität Berlin

Übersicht

Filter

Sei M eine (unendliche) Menge.

Filter

$F \subseteq \mathfrak{P}(M)$ heißt *Filter* (auf M), falls

1. $M \in F$, $\emptyset \notin F$
2. $A, B \in F \Leftrightarrow A \cap B \in F$ (eDE)
3. $A \in F$, $A \subseteq B \Rightarrow B \in F$.

Freie Universität Berlin

Ultrafilter

Ultrafilter

Ein Filter F heißt **Ultrafilter**, falls eine (alle) der folgenden Eigenschaften gilt:

- F ist maximal: für alle Filter G: $(F \subseteq G \Rightarrow F = G)$.
- F ist prim: $A \cup B \in F \Leftrightarrow (A \in F$ oder $B \in F)$
- F ist ultra: für $A \subseteq M$ gilt entweder $A \in F$ oder $M \setminus A \in F$.

Ultrapotenz am Beispiel $\mathbb{R}$

Äquivalent modulo Ultrafilter U

$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sind **äquivalent**, falls $\{m \in \mathbb{N} \mid f(m) = g(m)\} \in U$.

Ultrapotenz

Menge der Äquivalenzklassen $\mathbb{R}^U := \{[f]_U \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$.

Topologie

Sei X ein topologischer Raum.

Filterkonvergenz

- Ein Filter F (auf X) **konvergiert** gegen $x \in X$, falls $\mathscr{U}(x) \subseteq F$
- X hausdorff $\Leftrightarrow$ jeder Filter konvergiert höchstens eindeutig.
- X präkompakt $\Leftrightarrow$ jeder Ultrafilter konvergiert.

Freie Universität Berlin

Topologische Dynamik

Sei X kompakt, $f: X \to X$ stetig. (= Dynamisches System)

$x \in X$ ist **rekurrent**

- für jede Umgebung A (von x) ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $f^n(x) \in A$.
- •] es gibt Ultrafilter U auf $\mathbb{N}$, so dass $u - \lim_{n \in \mathbb{N}} f^n(x)$ „daran entlang“ wieder x ist.

Ultrafilter als Stone-Čech Kompaktifizierung

$\beta\mathbb{N}$

- $\beta\mathbb{N} = \{p \mid p \text{ Ultrafilter auf } \mathbb{N}\}$ größter kompakter Raum mit $\mathbb{N}$ dicht und diskret.
- Addition und Multiplikation setzen sich fort – assoziativ, aber nicht kommutativ.
- Es gibt viele idempotente Elemente.

Anwendungen

Unendliche Kombinatorik

Ist $\mathbb{N} = A_0 \cup A_1$, so enthält ein A_i

- arithmetische Progressionen jeder Länge (Van der Waerden)
- für ein $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alle $\sum_{i \in F} x_i$ ($F \subseteq \mathbb{N}$ endlich) (Hindman)

Freie Universität Berlin