

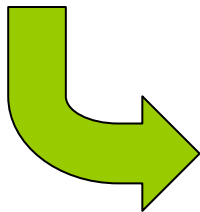
Wie lösen wir ILPs exakt?

Branch-and-Bound

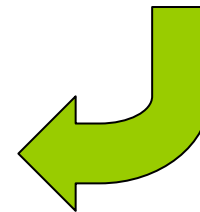
Schnittebenenverfahren

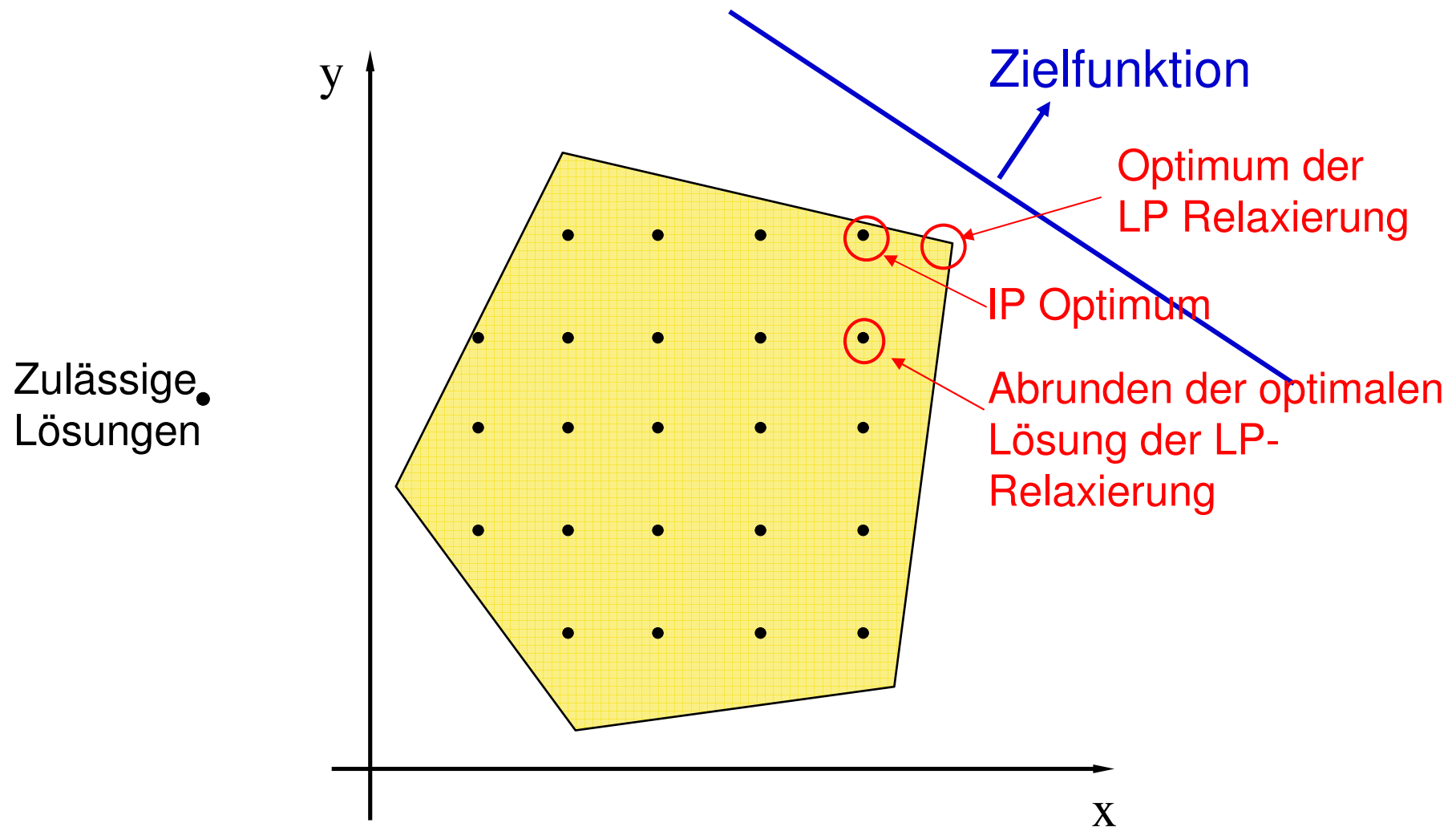
Acyclic
Subgraph

TSP



Branch-and-Cut





Lineares Programm

Branch-and-Bound

- Zerlegung in Teilprobleme
- Berechnung oberer und unterer Schranken
- Löse erste Relaxierung → obere Schranke zulässig? → optimal
- Sonst: **Partitioniere** in Teilprobleme
 - Löse Relaxierung
→ Lsg. (a) **ganzzahlig** oder (b) **unzulässig** oder (c) neue, evtl. **schärfere, obere Schranke**
 - Fall (c) → eventuell rekursive Aufteilung

Branch-and-Bound

- Vernünftige Aufteilungsstrategie und endliche Lösungsmenge → endliche Anzahl Schritte
- Ergibt **Branch-and-Bound-Baum**
 - Knoten = Teilproblem
 - Söhne = Partitionierung des Vaterproblems
- Intelligente Enumeration
- Permanent **Gütegarantie**, bei Termination **beweisbar optimal**

Branch-and-Bound

Betrachte das folgende ILP:

$$\text{Max } x + y + 2z \quad (\text{IP}_0)$$

$$\text{Subject to } 7x + 2y + 3z \leq 36$$

$$5x + 4y + 7z \leq 42$$

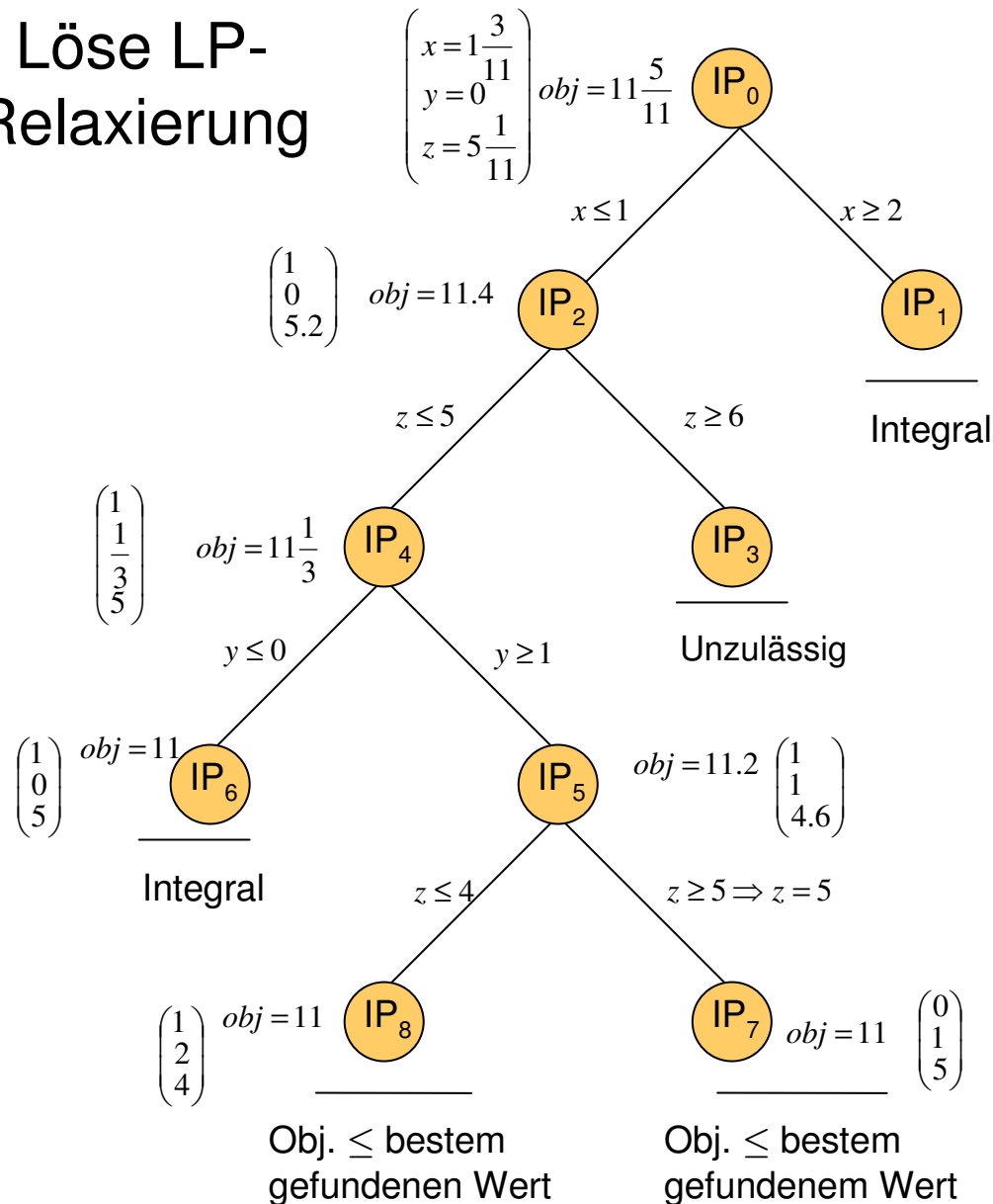
$$2x + 3y + 5z \leq 28$$

$$x, y, z \geq 0, \text{ ganzzahlig}$$

LP-Relaxierung

Branch-and-Bound für ILPs: Beispiel

Löse LP-
Relaxierung



Bester IP-
Wert

~~10~~ 11

Beste IP-
Lösung

~~$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$~~ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Garantie

~~87,3%~~ ~~98,2%~~
~~87,7%~~ 100%
~~88,2%~~

$$\text{Max } x + y + 2z$$

$$\text{Subject to } 7x + 2y + 3z \leq 36$$

$$5x + 4y + 7z \leq 42$$

$$2x + 3y + 5z \leq 28$$

$$x, y, z \geq 0, \text{ ganzzahlig}$$

Branch-and-Bound

- Eingabe: Gemischt-ganzzahliges lineares Programm (A, b, c, N_1)

$$(\text{MIP}^=) \quad \max c^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$x \text{ ganzzahlig } \forall i \in N_1$$

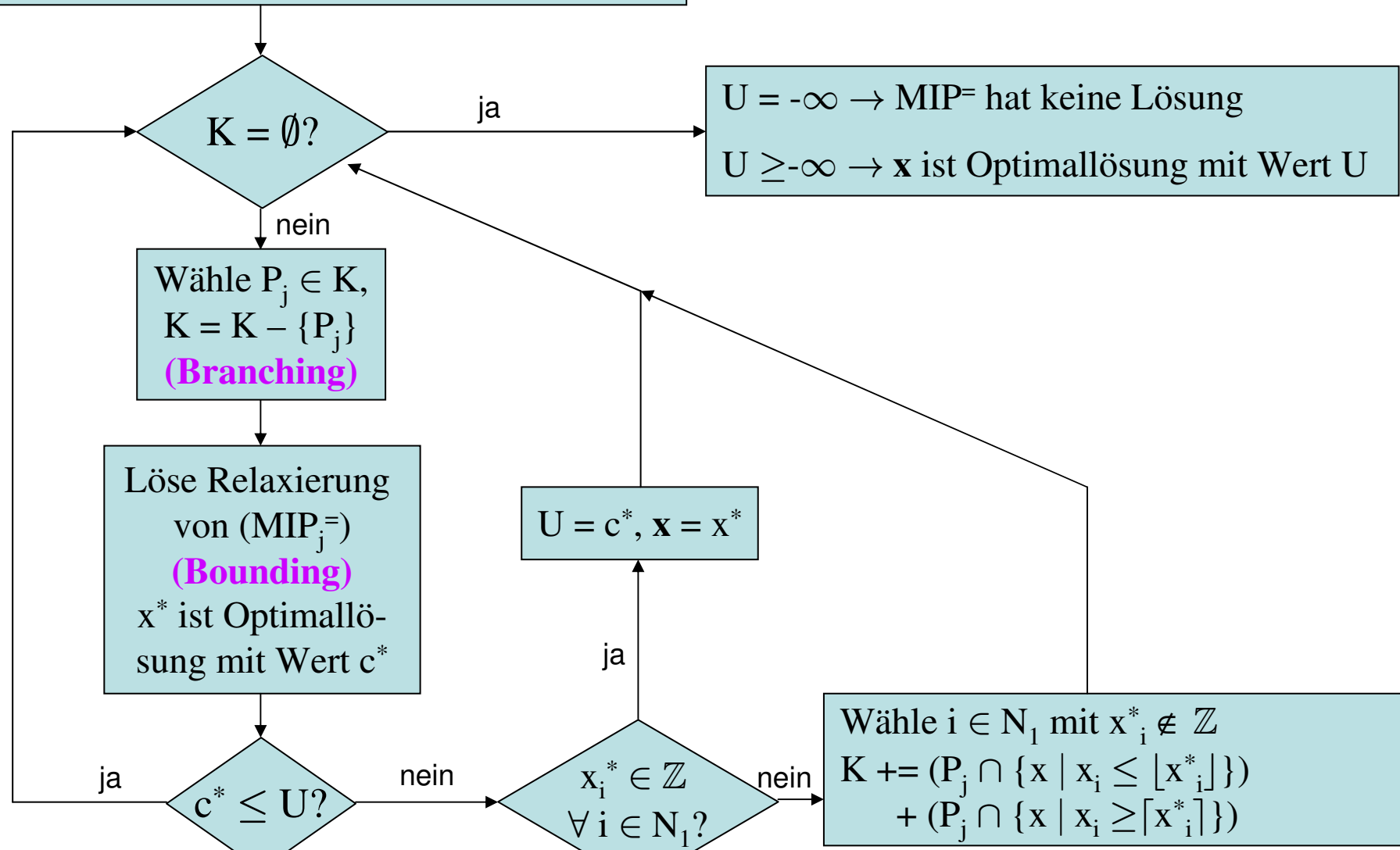
- Ausgabe: Lösung von $(\text{MIP}^=)$ oder Beweis der Unlösbarkeit

$P_0 = \{x \mid Ax = b, x \geq 0, x_i \text{ ganzzahlig } \forall i \in N_1\}$

$U = -\infty$

$K := \{P_0\}$ (Liste der offenen Probleme)

$x = \text{NIL}$ (beste Lösung)



Branch-and-Bound

■ Analyse:

- (LMIP=) unzulässig oder unbeschränkt $\rightarrow$ B&B bricht ab mit korrektem Ergebnis
- (LMIP=) hat endliches Optimum und $P_0 \neq \emptyset \rightarrow$ endlich viele Schritte zur Optimallösung
- (LMIP=) hat endliches Optimum und $P_0 = \emptyset \rightarrow$ Abbruch durch Zusatzrestriktionen

■ Praxis:

- Beschränkung der Baumgröße meist notwendig
- $\rightarrow$ Branch-and-Cut $\rightarrow$ später