Freie Universität Berlin
Zuse Institut Berlin (ZIB)
Prof. Dr. H. Siebert, Dr. T. Dierkes, M. Berg

8. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Analysis Sommersemester 2013

Abgabe: 11.06.2013 in der Vorlesung

Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **aller** *Gruppenmitglieder stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Bestimmen Sie für die Differentialgleichung

$$y' = \lambda\, y + A_0 \sin(\omega\, t + \varphi_0), \quad \lambda < 0, \quad A_0,\, \omega,\, \varphi_0 \in \mathbb{R}$$

eine partikuläre Lösung der Form

$$y_p(t) = A \sin(\omega\, t + \varphi), \quad A,\, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Wie verhalten sich A und φ asymptotisch für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$?
Wie lautet die allgemeine Lösung dieser Gleichung?
(*Hinweis*: Die Funktionen $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ sind linear unabhängig. Bestimmen Sie daher A und φ in Abhängigkeit von ω und λ mittels Koeffizientenvergleich. Additionstheoreme helfen, um Terme mit $\sin(\omega\, t + \varphi)$ und $\cos(\omega\, t + \varphi)$ aufzulösen.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Untersuchen Sie das folgende System nach qualitativen Eigenschaften:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2\,, \\ y_2' &= \frac{1}{6}\, y_1^3 - y_1 - y_2\,. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die stationären Punkte des Systems, mitsamt deren Stabilität.

(b) Skizzieren Sie die jeweiligen lokalen Phasenportraits. Im Falle zweier reeller Eigenwerte nutzen Sie dazu auch die zugehörigen Eigenvektoren.

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Untersuchen Sie den Gleichgewichtspunkt $u_0 = 0$ des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= -2\, y_1 + y_1\, y_2^3\,, \\ y_2' &= -y_1^2\, y_2^2 - y_2^3 \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Lyapunov-Funktion $E(y)$.
(*Hinweis:* Probieren Sie dazu den Ansatz $E(y) = a\, y_1^2 + b\, y_2^2$.)

b.w.

Aufgabe 4 (2 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z \cdot \overline{z}$. In welchen Punkten ist f komplex differenzierbar, in welchen holomorph?

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Der *Hauptwert des Logarithmus* ist definiert als

$$Log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to B := \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Im}(z) \leq \pi\},\ \ z \mapsto ln|z| + \mathrm{i}\, arg(z),$$

wobei ln der reelle natürliche Logarithmus und arg die Argumentfunktion ist.
Zeigen Sie, dass Log die Umkehrfunktion von $\exp|_B$ und holomorph auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ ist.