Freie Universität Berlin
Zuse Institut Berlin (ZIB)
Prof. Dr. H. Siebert, Dr. T. Dierkes, M. Berg

7. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Analysis
Sommersemester 2013

Abgabe: 04.06.2013 in der Vorlesung

Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **aller** *Gruppenmitglieder stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Berechnen Sie die (möglicherweise komplexwertigen) Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

(a)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix},$$

(b)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden Differentialgleichungssystems:

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} y.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden Differentialgleichungssystems:

$$y^{(4)} - 4\,y^{(3)} + 15\,y'' - 22\,y' + 10\,y = 0.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Die Bewegungen des *Foucaultschen Pendels* beschreibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\,k\,\dot{y} - \gamma\,x, \\ \ddot{y} &= -2\,k\,\dot{x} - \gamma\,y, \end{aligned}$$

wobei $k \in \mathbb{R}$ eine von der geographischen Breite abhängige Konstante sei und $\gamma := g\,/\,l$, mit g der Erdbeschleunigung (≈ 9.81 m/s) und l der Pendellänge (in m), bedeuten soll. Die kartesischen Koordinaten in Nord-Süd- bzw. West-Ost-Richtung über Grund seien dabei mit x bzw. y bezeichnet.

b.w.

(a) Fassen Sie das System zu *einer* Dgl. 2. Ordnung für $z(t) := x(t) + \mathrm{i}\, y(t)$ zusammen und lösen Sie diese allgemein. Zeigen Sie damit, dass für jede Lösung die Abstandsfunktion $r(t) := |z(t)|$ die Periode $T = 2\pi\,/\,\omega$, mit $\omega = \sqrt{k^2 + \gamma}$, besitzt.

(b) Nun seien die Anfangswerte $z(0) = x_0 > 0$ und $\dot{z}(0) = \mathrm{i}\, v_0\,,\ v_0 \in \mathbb{R}\,,$ vorgegeben. Zeigen Sie: Die zugehörige Abstandsfunktion $r(t)$ der Lösung erfüllt entweder

$$r(t) \leq x_0 \qquad \text{oder} \qquad r(t) \geq x_0$$

für *alle* $t \in \mathbb{R}$. Für welche v_0 ist $r(t) \equiv x_0$? Was gilt für $v_0 = 0$?