Freie Universität Berlin
Zuse Institut Berlin (ZIB)
Prof. Dr. H. Siebert, Dr. T. Dierkes, M. Berg

6. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Analysis
Sommersemester 2013

Abgabe: 28.05.2013 in der Vorlesung

Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **aller** *Gruppenmitglieder stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Betrachte die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(a) $f(x) = \exp(-x) \,/\, x^2 \;, \quad x \neq 0 \;,$

(b) $f(x) = -x^2 \, \cos x \;,$

(c) $f(x) = |x|^\alpha \;, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$ (wobei 0^0 nicht definiert sei).

Finden Sie jeweils die größten Teilmengen von $\mathbb{R}$, auf denen diese Funktionen lokal Lipschitz-stetig sind. Welche von ihnen ist dort Lipschitz-stetig?

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, und $f : K \to \mathbb{R}$ sei *lokal* Lipschitz-stetig auf K. Zeigen Sie, dass f sogar Lipschitz-stetig auf K ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionspaare jeweils ein Fundamentalsystem bilden. Begründen Sie!

(a)

$$y^1(t) = \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad y^2(t) = \begin{pmatrix} e^t - e^{-t} \\ e^t + e^{-t} \end{pmatrix},$$

(b)

$$y^1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad y^2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Sei $W = W(t)$ die Wronski-Determinante einer Fundamentalmatrix des homogenen linearen Systems $y' = A(t)\,y$. Zeigen Sie:

b.w.

(a) W erfüllt die Differentialgleichung

$$W' = \big(\mathrm{trace}\ A(t)\big) \cdot W,$$

wobei (trace $\cdot$) die Spur einer Matrix bezeichnet, d.h. trace $B = \sum_{j=1}^{n} b_{jj}$.

(b) Folglich gilt dann

$$W(t) = W(t_0)\ \exp\left(\int_{t_0}^{t} \big(\mathrm{trace}\ A(s)\big)\,\mathrm{d}s \right).$$