Freie Universität Berlin
Zuse Institut Berlin (ZIB)
Prof. Dr. H. Siebert, Dr. T. Dierkes, M. Berg

5. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Analysis
Sommersemester 2013

Abgabe: 21.05.2013 in der Vorlesung

Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **aller** *Gruppenmitglieder stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Angenommen, der Luftwiderstand eines Pkws sei proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit des Wagens. Sei m die Masse des Pkws und K die konstante Antriebskraft des Motors (wobei die geschwindigkeitsunabhängigen Rollreibung schon abgezogen sei). Verwenden Sie das Newtongesetz $F = m \cdot a$, um eine Differentialgleichung für die Geschwindigkeit $v(t)$ des Pkws herzuleiten. Lösen Sie diese Gleichung unter der Anfangsbedingung $v(0) = 0$. Was lässt sich aus dem Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$ schließen?
(*Hinweis*: es ist $a = \ddot{x}(t)$, wenn $x = x(t)$ die Weg-Zeitfunktion des Wagens bezeichnet, der entlang der positiven Richtung der x-Achse fährt.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen. In welchem Bereich sind die Lösungen jeweils definiert?

(a) $y' = y \cdot \sin t$,

(b) $y' = \mathrm{e}^y$,

(c) $y' = 3y + \mathrm{e}^t \sin t$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig und y_1, y_2, y_3 drei paarweise verschiedene Lösungen der linearen Differentialgleichung $y' + a(t)y = b(t)$. Zeigen Sie, dass der Quotient

$$Q(t) := \frac{y_1(t) - y_2(t)}{y_3(t) - y_2(t)}$$

für alle $t \in I$ existiert und konstant ist, d.h. $Q(t) \equiv \text{const.}$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Führen Sie die Picard-Iteration durch für das Anfangswertproblem

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Transformieren Sie dazu diese Gleichung in eine Dgl. erster Ordnung in den Variablen x und v, und benutzen Sie als Startfunktionen die konstanten Funktionen $x_0 \equiv 1, y_0 \equiv 0$. Gegen welche Funktionen konvergieren die entsprechenden Potenzreihen?