Freie Universität Berlin
Zuse Institut Berlin (ZIB)
Prof. Dr. H. Siebert, Dr. T. Dierkes, M. Berg

4. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Analysis
Sommersemester 2013

Abgabe: 14.05.2013 in der Vorlesung

Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **aller** *Gruppenmitglieder stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Ist $\mathbb{R}$ mit der kofiniten Topologie (vergleiche Blatt 1 Aufgabe 1) ein Hausdorffraum? Beweisen Sie Ihre Antwort.

(b) Seien $(X, \mathcal{O}_x)$ ein topologischer Raum, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Hausdorffraum, $D \subseteq X$ eine dichte Teilmenge von X (d.h. $\overline{D} = X$) und $f, g : X \to Y$ stetige Funktionen, die auf D übereinstimmen, also $f|_D = g|_D$.
Zeigen Sie, dass dann schon $f = g$ auf ganz X gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Hausdorffraum. Zeigen Sie, dass eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ auch abgeschlossen in X ist.
Gilt dies auch wenn X die Trennungseigenschaft T_2 nicht erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Skizzieren Sie die Richtungsfelder und einige Integralkurven der folgenden Differentialgleichungen in $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

(a) $y' = |y|$.

(b) $y' = y + \cos t$.

(c) $y' = f(y/t)$ mit einer glatten Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und $f(0) = \infty$, $f(\infty) = 1$.
(Hier reicht eine Skizze für den 1. Quadranten $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \subset G$.)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $A : I \to \mathbb{C}^{n \times n}$ eine stetige, $n \times n$–matrixwertige Funktion auf I. Für $t \in I$ gelte

$$\mathrm{Re}\, \langle A(t)u, u \rangle \leq 0 \quad \forall u \in \mathbb{C}^n.$$

Zeigen Sie, dass eine Lösung y(t) des Anfangswertproblems $y' = A(t)y,\ y(t_0) = z \in \mathbb{C}^n$ (mit $t_0 \in I$) die Abschätzung

$$\|y(t)\| \leq \|y(t_0)\|$$

für alle $t \in I$ erfüllt.