Freie Universität Berlin
Zuse Institut Berlin (ZIB)
Prof. Dr. H. Siebert, Dr. T. Dierkes, M. Berg

2. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Analysis
Sommersemester 2013

Abgabe: 25.04.2013 in der Vorlesung oder Übung

Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **aller** *Gruppenmitglieder stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie durch Angabe von drei Gegenbeispielen, dass keine zwei der Abbildungseigenschaften „stetig“, „offen“ und „abgeschlossen“ die jeweils dritte implizieren.
Zeigen Sie außerdem, dass für eine stetige Funktion der Abschluss des Bildes einer beliebigen Menge im Allgemeinen nicht gleich dem Bild des Abschlusses dieser Menge ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und M ein Unterraum von X.

(a) Zeigen Sie, dass $f|_M$ stetig ist, falls f stetig ist.

(b) Seien $A_1, \dots, A_n$ abgeschlossene Teilmengen von X mit $\bigcup_{i=1}^n A_i = X$. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn $f|_{A_i}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ stetig ist.

Ist die Aussage in (b) auch für Vereinigungen unendlich vieler abgeschlossener Mengen wahr? Begründen Sie.
Bem.: (b) gilt auch für beliebig viele offene statt endlich viele abgeschlossene Mengen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und

$$d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

eine Metrik auf $X \times Y$ (überzeugen Sie sich, dass es eine Metrik ist).
Seien $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ und $(X \times Y, \mathcal{O}_{d_{X\times Y}})$ die von den Metriken d_X, d_Y und $d_{X\times Y}$ induzierten topologischen Räume, und sei $\mathcal{O}_{X\times Y}$ die zu den Räumen $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ gehörige Produkttopologie auf $X \times Y$.
Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_{X\times Y} = \mathcal{O}_{d_{X\times Y}}$ gilt.

Aufgabe 4 (2 Punkte)
Betrachten Sie den Raum $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie bzgl. $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie. Berechnen Sie das Innere der Mengen

$$M_1 := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) \in \,]-1, 1[\,, f(1) > 1\}$$

und

$$M_2 := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} : f(2n) \in]0, 1[\}.$$

Aufgabe 5 (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ nicht homöomorph zu einem Intervall I in $\mathbb{R}$ ist (wobei $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ jeweils mit der natürlichen Topologie versehen sind).