Freie Universität Berlin
Zuse Institut Berlin (ZIB)
Prof. Dr. H. Siebert, Dr. T. Dierkes, M. Berg

# 1. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Analysis Sommersemester 2013

Ausgabe: 10.04.2013    Abgabe: 18.04.2011 in der Vorlesung

*Bitte beachten Sie:*
*Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen* **aller** *Gruppenmitglieder stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

**Aufgabe 1 (4 Punkte)**
Sei $X$ eine Menge. Definiere

$$\mathcal{O}_{cofinit} := \{O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ endlich oder } O \in \{\emptyset, X\}\} \qquad \text{und}$$

$$\mathcal{O}_{coabz} := \{O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ abzählbar oder } O \in \{\emptyset, X\}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_{cofinit}$ und $\mathcal{O}_{coabz}$ Topologien auf $X$ sind und prüfen Sie, ob $(X, \mathcal{O}_{cofinit})$ die Abzählbarkeitsaxiome erfüllt.
*Bemerkung:* Man nennt $\mathcal{O}_{cofinit}$ die cofinite, $\mathcal{O}_{coabz}$ die coabzählbare Topologie auf $X$.

**Aufgabe 2 (4 Punkte)**
Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, und seien $A, B \subseteq X$.

(a) Beweisen Sie, dass $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$ und, falls $A \subseteq B$, auch $\operatorname{int} A \subseteq \operatorname{int} B$ gilt.

(b) Beweisen Sie, dass $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$, $\operatorname{int}(A \cup B) \supseteq \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$ und geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass hier die andere Inklusion nicht gilt.

**Aufgabe 3 (4 Punkte)**
Seien $X$ eine Menge und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit

(i) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$,

(ii) $\forall B, B' \in \mathcal{B}\ \forall x \in B \cap B'\ \exists B'' \in \mathcal{B} : \ x \in B'' \subseteq B \cap B'$.

Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{O}$ bestehend aus allen möglichen Vereinigungen aus Elementen aus $\mathcal{B}$ eine Topologie ist, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{O}$ ist und dass, wenn $\mathcal{O}'$ eine weitere Topologie mit Basis $\mathcal{B}$ ist, $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$ gelten muss.

**Aufgabe 4 (4 Punkte)**
Sei $\mathcal{O} := \{O \subseteq \mathbb{R} \mid \forall x \in O\, \exists \varepsilon > 0 : \ [x, x+\varepsilon[ \subseteq O\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$ ist und geben Sie eine Umgebungsbasis für alle $x \in \mathbb{R}$ an.
Ist die Menge $]a, b[ \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$, offen in $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$?
Ist die Abbildung $\operatorname{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{nat}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}), x \mapsto x$ stetig?
*Bemerkung:* Der Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ heißt Sorgenfrey-Gerade.