Prof. Dr. Frank Noé
Dr. Christoph Wehmeyer
Tutoren:
Florian Litzinger (Di. 10-12; Di. 12-14)
Maikel Nadolski (Mi. 12-14; Mi. 14-16)

8. Übung zur Vorlesung **Numerik I**

Abgabe: Donnerstag, 12. Juni 2014, 16:00 Uhr, Tutorenfächer

Aufgabe 1 *(Gauß-Hermite Quadratur, 3T+1T+3T)*

Wir betrachten die Gewichtsfunktion $w(x) = \exp(-\frac{1}{2}x^2)$, definiert auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$. Die orthogonalen Polynome H_n, $n = 0, 1, \dots$ zu dieser Gewichtsfunktion heißen Hermite-Polynome. Dies ist eine wichtige Familie orthogonaler Polynome, die in zahlreichen Teilgebieten der Mathematik eine Rolle spielt. Die ersten beiden Hermite-Polynome sind $H_0(x) \equiv 1$ und $H_1(x) = x$. Auch generell gilt, dass die Hermite-Polynome gerade für gerades n und ungerade für ungerades n sind. Außerdem erfüllen die H_n folgende Gleichung:

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x) H_n(x) \exp(-\frac{1}{2}x^2) \mathrm{dx} \quad = \quad \sqrt{2\pi} n!$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Drei-Term-Rekursion für orthogonale Polynome, dass für $n \geq 2$

$$H_n(x) \quad = \quad x H_{n-1}(x) - (n-1) H_{n-2}(x)$$

gilt.
b) Berechnen Sie das zweite und dritte Hermite-Polynom H_2, H_3. Berechnen Sie auch die Nullstellen x_k von H_3 für $k = 0, 1, 2$.
c) Wir wollen nun uneigentliche Integrale über $(-\infty, \infty)$ mit der Gewichtsfunktion w berechnen. Wir wollen dabei keine summierte Quadraturformel verwenden, sondern das ganze Integrationsgebiet als ein Teilintervall auffassen. In diesem Fall können wir die Gewichte als

$$\mu_k \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} L_k(x) w(x) \mathrm{dx}$$

berechnen, und die entsprechende Quadraturformel ist

$$I(f) \quad \approx \quad \sum_{k=0}^{2} \mu_k f(x_k).$$

Ermitteln Sie die zu den Stützstellen x_k gehörigen Gewichte μ_k für $k = 0, 1, 2$. Sie müssen dabei die Formeln für Gauss-Integrale nicht beweisen. Verwenden Sie die so gewonnene Quadraturformel, um das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \cos(x) w(x) \mathrm{dx}$$

näherungsweise zu berechnen. Vergleichen Sie mit dem tatsächlichen Wert (den Sie mit Hilfe von Matlab berechnen können).

Aufgabe 2 *(Gauß-Lobatto-Quadratur, 2P):*

Wenden Sie die summierte Gauss-Lobatto-Quadratur zur Integration der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x}$ auf dem Intervall $[0, 1]$ an. Die Stützstellen sind

$$\begin{aligned} x_{0k} &= z_{k-1}, \\ x_{1k} &= z_{k-1} + \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{5}}{5})h, \\ x_{2k} &= z_{k-1} + \frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{5}}{5})h, \\ x_{3k} &= z_k, \end{aligned}$$

die zugehörigen Gewichte sind $\mu_0 = \frac{1}{12}$, $\mu_1 = \frac{5}{12}$, $\mu_2 = \frac{5}{12}$, $\mu_3 = \frac{1}{12}$. Verwenden Sie jeweils äquidistante Zerlegungen zur Schrittweite $h = \frac{1}{m}$, $m = 1, \ldots, 50$. Berechnen Sie den Fehler zum exakten Wert $I(f) = \log 2$ für jeden Wert von h. Berechnen Sie dasselbe auch noch einmal mit der summierten 3/8-Regel vom letzten Übungsblatt. Plotten und vergleichen Sie das Konvergenzverhalten beider Methoden.