Prof. Dr. Frank Noé
Dr. Christoph Wehmeyer
Tutoren:
Florian Litzinger (Di. 10-12; Di. 12-14)
Maikel Nadolski (Mi. 12-14; Mi. 14-16)

6. Übung zur Vorlesung **Numerik I**

Abgabe: Freitag, 30. Mai 2014, 10:00 Uhr, Tutorenfächer

Aufgabe 1 *(QR-Iteration für Singulärwerte, 1+1+1 P):*

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix und $m \geq n$.
a) Seien $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal. Zeigen Sie, dass die Singulärwerte von A und PAQ identisch sind. Zur Erinnerung: Die Singulärwerte sind die Wurzeln der Eigenwerte von $A^T A$.
b) Zeigen Sie, dass wir orthogonale Matrizen P und Q wie oben finden können, die A auf Bidiagonalgestalt transformieren, sodass

$$\begin{aligned} A &= PBQ \\ B &= \begin{pmatrix} * & * & \\ & * & * \\ & & * \\ & & \\ & & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Wie können Sie nun die Singulärwerte von A berechnen?

Aufgabe 2 *(QR-Iteration, 4 + 1 P):*

a) Implementieren Sie den QR-Algorithmus, der die Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix A auf eine gegebene Toleranz berechnet. Damit sei gemeint, dass alle Einträge der Matrix abseits der Diagonalen im Betrag nicht größer als die Toleranz sind.
b) Berechnen Sie damit die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & 0 & 1 & 12 \\ -1 & -2 & -3 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

mit einer Genauigkeit von 10^{-12}. Lassen Sie auch den Fehler in jedem Zeitschritt zurückgeben und plotten Sie den Fehler in einem halb-logarithmischen Plot.

Zeigen Sie im selben Plot auch die langsamste Rate für den Abfall der Nebendiagonalelemente

$$(\max_{i>j} \quad |\frac{\lambda_i}{\lambda_j}|)^k$$

die sich aus den Eigenwerten von A ergibt.