Prof. Dr. Frank Noé
Dr. Christoph Wehmeyer
Tutoren:
Florian Litzinger (Di. 10-12; Di. 12-14)
Maikel Nadolski (Mi. 12-14; Mi. 14-16)

5. Übung zur Vorlesung **Numerik I**

Abgabe: Donnerstag, 22. Mai 2014, 16:00 Uhr, Tutorenfächer

Aufgabe 1 *(Singulärwertzerlegung, 1+1+2+2 P):*

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix und $m \geq n$.
a) Zeigen Sie zunächst, dass es eine $n\times n$-Diagonalmatrix D mit nicht-negativen Diagonaleinträgen $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 0$, sowie eine unitäre Matrix $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, sodass $D = V^T A^T AV$. Wir diagonalisieren also $A^T A$.
b) Wir benennen $W := AV$. Zeigen Sie, dass

$$W^T W \quad = \quad D.$$

c) Für $i = 1, \ldots, n$ definieren wir $\sigma_i := \sqrt{d_i} \geq 0$ und eine Diagonalmatrix Σ, deren Diagonaleinträge gerade die σ_i sind. Finden Sie orthonormale Spaltenvektoren $u_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \ldots$,n, sodass

$$W \quad = \quad U\Sigma$$

gilt, wobei U die Matrix ist, deren Spalten die u_i sind.
d) Folgern Sie, dass sich A damit schreiben lässt als

$$A \quad = \quad U\Sigma V^T$$

beziehungsweise als

$$A \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \sigma_i u_i v_i^T.$$

Diese Zerlegung heißt die Singulärwertzerlegung von A. Die Zahlen σ_i heißen Singulärwerte, die Vektoren u_i und v_i heißen linke und rechte Singulärvektoren von A.

Aufgabe 2 *(Frobeniusnorm und Singulärwerte, 1+1+2 P):*

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ Matrizen und $m \geq n$.
a) Wir definieren das **Frobenius-Skalarprodukt** zweier Matrizen folgendermaßen:

$$\langle A, B\rangle_F \quad := \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}.$$

Das Skalarprodukt entsteht also dadurch, dass wir die Matrizen als Vektoren der Länge mn auffassen und deren euklidisches Skalarprodukt berechnen. Zeigen Sie, dass es sich um ein Skalarprodukt handelt.
b) Zeigen Sie, dass das Frobenius-Skalarprodukt invariant unter Multiplikation mit unitären Matrizen ist. Genauer, falls $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ unitäre Matrizen sind, dann gilt für alle $m \times n$-Matrizen A, B

$$\begin{aligned}\langle UA, UB\rangle_F &= \langle A, B\rangle_F \\ \langle AV, BV\rangle_F &= \langle A, B\rangle_F\end{aligned}$$

c) Schließen Sie daraus, dass für die zugehörige Frobeniusnorm einer Matrix A gilt:

$$\|A\|_F^2 \quad = \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2},$$

wobei die σ_i die Singulärwerte sind.

Aufgabe 3 *(Power-Iteration, 3 P):*

Berechnen Sie den größten Eigenwert und zugehörigen linken Eigenvektor der Matrix

$$P \quad = \quad \begin{pmatrix} 0.98 & 0.01 & 0.005 & 0.005 \\ 0.01 & 0.95 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0.8 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Power-Iteration von einem beliebigen Startvektor. Lassen Sie bitte sowohl den geschätzten Eigenwert als auch den geschätzten Eigenvektor zu jedem Zeitschritt zurückgeben. Plotten Sie den geschätzten Eigenwert über der Anzahl der Iterationsschritte. Stellen Sie weiterhin auch den Fehler in der euklidischen Norm zwischen dem geschätzten Eigenvektor und einer normierten Referenzlösung in einem halblogarithmischen Plot dar. Zeigen Sie in dem selben Plot auch die erwartete Fehlerrate $(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k$. Die Referenzwerte können Sie mit den Matlab-Funktionen **eig** oder **eigs** berechnen.