Prof. Dr. Frank Noé
Dr. Christoph Wehmeyer
Tutoren:
Florian Litzinger (Di. 10-12; Di. 12-14)
Maikel Nadolski (Mi. 12-14; Mi. 14-16)

11. Übung zur Vorlesung **Numerik I**

Abgabe: Donnerstag, 03. Juli 2014, 16:00 Uhr, Tutorenfächer

Aufgabe 1 *(Flussoperator, 3T + 1T)*

Sei $F \in C^0(\mathbb{R}^d)$ global Lipschitz-stetig.
a) Begründen Sie, dass der Flussoperator $\phi^t x$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist, und beweisen Sie die Identität:

$$\phi^{s+t} \quad = \quad \phi^s \phi^t \quad \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Menge der Flussoperatoren

$$\{\phi^t | t \in \mathbb{R}\}$$

eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung bildet. Dabei ist $\phi^0 = \text{id}$ zu setzen.

Aufgabe 2 *(Runge-Kutta-Verfahren, 3P + 2P)*

a) Schreiben Sie Matlab-Funktionen, welche die Lösung eines Anfangswertproblems mit Hilfe der expliziten Verfahren expliziter Euler, Runges Methode und Runge-Kutta-4 berechnen. Den Funktionen sollen die rechte Seite F, der Anfangswert x_0, der Zeitschritt τ und die gesamte Integrationszeit T übergeben werden. Zurückgeben sollen die Funktionen den Vektor aller Zeitschritte und die berechnete Näherungslösung.
Hinweis: Alternativ können Sie auch eine Funktion schreiben, welche die Differentialgleichung für ein beliebiges explizites Runge-Kutta-Verfahren löst. Der Funktion muss dann zusätzlich das entsprechende Butcher-Tableau übergeben werden.
b) Vergleichen Sie mit Hilfe Ihrer Funktion aus Teil a) das Verhalten des expliziten Euler-Verfahrens, des Verfahrens von Runge und des klassischen Runge-Kutta-4-Verfahrens. Lösen Sie damit den Harmonischen Oszillator, das heißt die rechte Seite ist gegeben durch die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto Fx$, mit der Matrix

$$F \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Als Startwert wählen Sie bitte $x_0 = (1\ 0)^T$ und lösen Sie jeweils bis zur Zeit $T = 2\pi$. Lösen Sie die Gleichung mit allen drei Methoden für die Schrittweiten

$$\tau = 2 \cdot 10^{-1},\ 1 \cdot 10^{-1},\ 5 \cdot 10^{-2},\ 1 \cdot 10^{-2},\ 5 \cdot 10^{-3},\ 1 \cdot 10^{-3}.$$

Berechnen Sie den maximalen Diskretisierungsfehler zur exakten Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

und plotten Sie diesen über den inversen Zeitschritt in einem logarithmischen Plot.