Prof. Dr. Frank Noé
Dr. Christoph Wehmeyer
Tutoren:
Florian Litzinger (Di. 10-12; Di. 12-14)
Maikel Nadolski (Mi. 12-14; Mi. 14-16)

10. Übung zur Vorlesung **Numerik I**

Abgabe: Donnerstag, 26. Juni 2014, 16:00 Uhr, Tutorenfächer

Aufgabe 1 *(Romberg-Quadratur, 1P + 3P + 1P)*

In dieser Aufgabe sollen Sie den Algorithmus für die Romberg-Quadratur umsetzen.
a) Schreiben Sie eine Funktion Tj = **AddGridPoint**$(hj, Tjold, Tj0)$, welche die nächste Zeile des Aitken-Neville-Tableaus zur Extrapolation der Trapezregel nach $h = 0$ berechnet. Übergeben werden sollen der Vektor der ersten j Schrittweiten hj, die vorherige Zeile des Aitken-Neville-Tableaus $Tjold$, und die Auswertung $Tj0$ der summierten Trapezregel zur kleinsten Schrittweite in hj. Verwenden Sie die in der Vorlesung besprochene Formel zur Berechnung der Einträge von Tj.
b) Schreiben Sie eine Funktion $[I, T]$ = **RombergQuad**$(f, a, b, Nmax)$, welche die Funktion aus Aufgabe a) benutzt, um die Romberg-Quadratur der Funktion f über dem Intervall $[a, b]$ auszuführen. Ausgehend von der Schrittweite $h_0 = (b - a)$ soll die Funktion die Schrittweite $Nmax$ mal halbieren und die Extrapolation der Trapezregel zu jeder dieser Schrittweiten durchführen. Beachten Sie, dass Sie dazu jeweils nur die nächste Zeile des Aitken-Neville-Tableaus mit Hilfe Ihrer Funktion aus Teil a) berechnen müssen. Achten Sie auch darauf, dass Sie die Funktion f nicht überflüssig oft an denselben Stellen auswerten (wie in der Vorlesung besprochen). Die Funktion soll das Ergebnis der Romberg-Quadratur zu jeder Schrittweite als Vektor I und dazu auch das Ergebnis der summierten Trapezregel als Vektor T zurückgeben.
c) Berechnen Sie auf diese Weise das Integral der Funktion

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{1 + x^2}$$

über dem Intervall $[-1, 1]$ für $Nmax = 7$. Plotten Sie den Fehler zum exakten Wert $I(f) = \frac{\pi}{2}$ in einem halblogarithmischen Plot. Plotten Sie auch den Fehler der summierten Trapezregel in der gleichen Grafik als Vergleich.

Aufgabe 2 *(Multilevel-Quadratur, 4P + 1P)*

a) Implementieren Sie den Algorithmus für die adaptive Multilevel-Quadratur. Schreiben Sie dazu eine Funktion, der Sie eine Funktion f, ein Anfangsgitter

z_0 sowie eine Fehlertoleranz ϵ übergeben, und welche den geschätzten Wert des Integrals und den geschätzten Diskretisierungsfehler für alle Iterationsschritte zurückgibt. Wie in der Vorlesung besprochen, soll das Gitter so lange verfeinert werden, bis der Unterschied zwischen summierter Simpson-Regel und summierter Trapezregel kleiner als die Fehlertoleranz ist. Im Verfeinerungsschritt sollen diejenigen Teilintervalle halbiert werden, welche den lokalen Diskretisierungsfehler maximieren.
b) Integrieren Sie damit die Funktion

$$f(x) \quad = \quad \frac{\gamma}{2\arctan(\gamma)} \frac{1}{1+(\gamma x)^2},$$

für $\gamma = 500$ über dem Intervall $[-1, 1]$. Der tatsächliche Wert des Integrals ist 1. Setzen Sie die Fehlertoleranz auf 10^{-4}. Plotten Sie bitte den geschätzten Diskretisierungsfehler über alle Schritte. In einem weiteren Plot zeigen Sie bitte den Quotienten zwischen echtem und geschätztem Disrketisierungsfehler über alle Iterationsschritte.