1. Übung zur Vorlesung **Numerik I**

Aufgabe 1 *(Kondition einer Matrix)*:

a) Zeigen Sie, dass für eine invertierbare, quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

$$\kappa(A) \quad = \quad \frac{\max_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min_{\|x\|=1} \|Ax\|}.$$

b) Zeigen Sie, dass für eine symmetrisch positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

$$\kappa(A) \quad = \quad \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}},$$

wobei $\lambda_{max} \geq \lambda_{min} > 0$ den größten und kleinsten Eigenwert der Matrix A bezeichnen. Die zu Grunde liegende Vektornorm soll diesmal die 2-Norm (euklidische Norm) sein.

Aufgabe 2 *(LR-Zerlegung)*:

a) Implementieren Sie den Gauß-Algorithmus mit LR-Zerlegung. Schreiben Sie also eine Funktion $LR = \mathbf{LRDecomp}(A)$, welche die LR-Zerlegung einer Matrix A berechnet, wobei sie die Matrizen L und R in einer Matrix abspeichern können. Dazu schreiben Sie bitte eine Funktion $x = \mathbf{SolveLR}(LR, b)$, welche zu gegebener rechter Seite b und gegebener LR-Matrix LR das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der ersten Funktion löst. Implementieren Sie dazu auch die Vorwärts- und Rückwärts-Substitution als Funktionen $x = \mathbf{ForwardSub}(L, b)$ und $x = \mathbf{BackwardSub}(R, b)$.
b) Aus CoMa kennen Sie das Interpolationsproblem: Finde für $n + 1$ gegebene Werte $f(x_0), \ldots, f(x_n)$ einer Funktion f ein Polynom P_n n-ten Grades, das f an diesen Stellen interpoliert, sodass also $p(x_i) = f(x_i)$ für alle $i = 0, \ldots, n$ gilt. Zeigen Sie: Wählen wir für den Raum der Polynome maximal n-ten Grades die Basis der Monome, also der Funktionen

$$p_i(t) \quad = \quad t^i \quad i = 0, \ldots, n.$$

Dann erfüllen die Koeffizienten des gesuchten Interpolationspolynomes das lineare Gleichungssystem

$$Aa = b.$$

Dabei ist $a = (a_{0,} \ldots, a_n)^T$ der Koeffizientenvektor des Interpolationspolynoms, $b = (f(x_0), \ldots, f(x_n))^T$ der Vektor der Funktionswerte, und die Matrix A hat die Einträge $a_{ij} = x_i^j$, für $i, j = 0, \ldots, n$. Diese Matrix A heißt auch die Vandermonde-Matrix.

c) Wählen Sie als Stützpunkte ein äquidistantes Gitter aus $n + 1$ Punkten aus dem Einheitsintervall $I = [0, 1]$, einschließlich der Endpunkte. Das Gitter besteht also aus den Punkten $x_i = ih$, für $h = \frac{1}{n}$ und $i = 0, \ldots, n$. Als zu interpolierende Funktion wählen Sie bitte die Funktion $f(x) = x^4 - x^2$. Lösen Sie nun das Interpolationsproblem aus b) mit ihren Methoden aus a) für $n = 5, 10, 20, 50, 80, 100$. Geben Sie bitte den Lösungsvektor a aus und plotten sie die berechnete Lösung als Funktion über einem feinen Gitter. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der korrekten Lösung. Was können Sie beobachten?