Prof. Dr. Frank Noé
Dr. Christoph Wehmeyer
Tutoren: Anna Dittus, Felix Mann, Dominik Otto

10. Übung zur Vorlesung
Computerorientierte Mathematik II

Abgabe: Freitag, 03.07.2015, 12:15 Uhr, Tutorenfächer Arnimallee 3

`http://www.mi.fu-berlin.de/w/CompMolBio/ComaII15`

Aufgabe 1 *(Satz 3.19, 4T)*:

Die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ sei symmetrisch und $x, \tilde{x}$ seien Lösungen des Anfangswertproblems (3.62) zu Anfangswerten $x_0, \tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^m$.
a) *(3T)* Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty \leq \max_{t \in [0,T]} e^{\lambda_1 t} \|x_0 - \tilde{x}_0\|_2 .$$

b) *(1T)* Zeigen Sie, dass die Abschätzung aus a) scharf ist, d.h., dass es Fälle gibt, in denen die Gleichheit erreicht wird.

Aufgabe 2 *(Lorenz-Attraktor, 8P)*:

Gegeben sei das folgende System gekoppelter, nichtlinearer gewöhnlicher Differenzialgleichungen,

$$\begin{aligned} x'(t) &= a(y(t) - x(t)) \\ y'(t) &= (b - z(t))x(t) - y(t) \\ z'(t) &= x(t)y(t) - cz(t) \, , \end{aligned}$$

mit $0 < t \leq T$, den Konstanten $a = 10$, $b = 20$, $c = \frac{8}{3}$, und den Anfangswerten $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$.
a) *(5P)* Schreiben Sie eine Funktion

```
function [ x, y, z ] = attraktor( x0, y0, z0, n, tau )
```

zur approximativen Lösung des obigen Anfangswertproblems. Dabei bezeichne `tau` den Zeitschritt τ, `n` die Anzahl der Eulerschritte und `x0,y0,z0` die Anfangswerte $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$. Die vektorielle Darstellung des expliziten Euler-Verfahrens ist im nichtlinearen Fall,

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \, , \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \, ,$$

durch

$$\mathbf{x}(t+\tau) = \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \tau \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))\,, \quad \tau = \frac{T}{n}\,,$$

gegeben.
b) *(1P)* Plotten Sie für die Anfangswerte $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ und $T = 50$, $\tau = 10^{-4}$ die einzelnen Komponenten $x(t), y(t), z(t)$ gegenüber t.
c) *(2P)* Fertigen Sie mittels des matlab-Befehls `scatter3(x,y,z)` einen 3D-Scatterplot Ihrer Näherungslösungen $x(t), y(t), z(t)$ an.
Erläuterung: Der sogenannte Lorenz-Attraktor wurde urspünglich zur Modellierung von Strömungen in der Erdatmosphäre hergeleitet und zeigt für bestimmte Parameter und Startwerte chaotisches Verhalten. Bekannt ist er unter anderem für sein typisches „Schmetterlingsmuster“.