Prof. Dr. Frank Noé
Dr. Christoph Wehmeyer
Tutoren: Anna Dittus, Felix Mann, Dominik Otto

8. Übung zur Vorlesung
Computerorientierte Mathematik II

Abgabe: Freitag, 19.06.2015, 12:15 Uhr, Tutorenfächer Arnimallee 3

`http://www.mi.fu-berlin.de/w/CompMolBio/ComaII15`

Aufgabe 1 *(Euler-Verfahren, 5P+1T):*

a) *(4P)* Schreiben Sie zwei Funktionen

```
function x = explicitEuler(lambda, x0, n, T, f)
```

und

```
function x = implicitEuler(lambda, x0, n, T, f)
```

zur approximativen Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t)\,, \quad x(0) = x_0\,, \quad t \in [0, T]\,,$$

zum äquidistanten Gitter

$$t_k = \frac{k}{n} T\,, \quad k = 0, \ldots, n\,.$$

Dabei bezeichne `lambda` die Wachstums-/Zerfallskonstante λ, `x0` den Anfangswert x_0, `n` den maximalen Index der Gittervariablen, `T` die rechte Zeitintervallgrenze T und `f` ein Funktionshandle auf die Inhomogenitätsfunktion $f(t)$. Die Rückgabe der beiden Funktionen, `x`, sei die gesuchte Approximation

$$x_\Delta(t_k) = x_k\,, \quad k = 0, \ldots, n\,.$$

b) *(1P)* Seien $\lambda = -9$, $x_0 = 1$, $T = 2$ und $f(t) = t^2$ für das obige Anfangswertproblem gegeben. Plotten Sie für $n = 100$ die Approximationen mittels explizitem und implizitem Euler-Verfahren.
c) *(1T)* Ab welchem n ist die Stabilitätsbedingung für das explizite Euler-Verfahren im Aufgabenteil (b) erfüllt?

Aufgabe 2 *(Satz 3.9, 7T)*:

Beweisen Sie die Behauptung aus Satz 3.9. Seien also x_Δ und $\tilde{x}_\Delta$ die mit dem impliziten Euler-Verfahren bestimmten Näherungslösungen zu den Anfangswerten $x_0, \tilde{x}_0 \in \mathbb{R}$, sowie den diskreten rechten Seiten $f_\Delta, \tilde{f}_\Delta$, mit $f_\Delta(t_k) = f_k$, $\tilde{f}_\Delta(t_k) = \tilde{f}_k$, $k = 1, \ldots, n$.
a) *(3T)* Zeigen Sie zunächst (z.B. mittels vollständiger Induktion), dass die Gitterfunktion x_Δ, mit $x_\Delta(t_k) = x_k$, die Darstellung

$$x_k = (1 - \tau\lambda)^{-k} x_0 + \tau \sum_{\ell=0}^{k-1} (1 - \tau\lambda)^{\ell-k} f_{\ell+1}$$

hat.
b) *(4T)* Sei nun $\lambda \leq 0$. Zeigen Sie die Abschätzung

$$\|x_\Delta - \tilde{x}_\Delta\|_\infty \leq (1 + T) \max \left\{ |x_0 - \tilde{x}_0|, \|f_\Delta - \tilde{f}_\Delta\|_\infty \right\} .$$