Prof. Dr. Frank Noé
Dr. Christoph Wehmeyer
Tutoren: Anna Dittus, Felix Mann, Dominik Otto

7. Übung zur Vorlesung **Computerorientierte Mathematik II**

Abgabe: Freitag, 12.06.2015, 12:15 Uhr, Tutorenfächer Arnimallee 3

`http://www.mi.fu-berlin.de/w/CompMolBio/ComaII15`

Aufgabe 1 *(Euler-Verfahren, 7P+2T):*

a) *(4P)* Schreiben Sie zwei Funktionen

```
function x = evalExplicitEuler(lambda, x0, n)
```

und

```
function x = evalImplicitEuler(lambda, x0, n)
```

zur approximativen Lösung des homogenen Anfangswertproblems

$$x'(t) = \lambda x(t)\,, \quad x(0) = x_0\,, \quad t \in [0, 1]\,,$$

zum äquidistanten Gitter

$$t_k = \frac{k}{n}\,, \quad k = 0, \ldots, n\,.$$

Dabei bezeichne `lambda` die Wachstums-/Zerfallskonstante λ, `x0` den Anfangswert x_0 und `n` den maximalen Index der Gittervariablen. Die Rückgabe der beiden Funktionen, `x`, sei die gesuchte Approximation

$$x_\Delta(t_k) = x_k\,, \quad k = 0, \ldots, n\,.$$

b) *(3P)* Seien $n = 10$ und $x_0 = 1$ für das obige Anfangswertproblem gegeben. Plotten Sie für $\lambda = -5, -10, -11, -20, -21$ jeweils die exakte Lösung,

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}\,,$$

sowie die Approximationen mittels explizitem und implizitem Euler-Verfahren (fertigen Sie für jedes λ einen eigenen Graphen an).
c) *(2T)* Wie unterscheidet sich das Verhalten des expliziten Euler-Verfahrens von dem des impliziten Euler-Verfahrens? Beschreiben Sie kurz Ihre Beobachtung.

Aufgabe 2 *(Diskrete Kondition, 5T):*

Betrachten Sie das homogene Anfangswertproblem

$$x'(t) = \lambda x(t)\,, \quad x(0) = x_0\,, \quad t \in [0, T]\,,$$

mit gegebenem Anfangswert $x_0 = 1$ und gestörtem Anfangswert $\tilde{x}_0 = x_0(1+\epsilon)$, $|\epsilon| \leq \texttt{eps}$ (Sie können hier die Maschinengenauigkeit mit $\texttt{eps} = 10^{-8}$ ansetzen). Prüfen Sie für die folgenden Fälle, ob bei der approximativen Lösung mittels explizitem Euler-Verfahren mit Zeitschritt $\tau = \frac{1}{3}$ die Toleranzbedingung

$$\|x_\Delta - \tilde{x}_\Delta\|_\infty \leq 10^{-5}$$

erfüllt ist. Prüfen Sie außerdem (für $\lambda < 0$) die Stabilitätsbedingung

$$0 < \tau \leq \frac{2}{|\lambda|}\,.$$

a) *(1P)* $\lambda = 5$, $T = 1$.
b) *(1P)* $\lambda = 1$, $T = 7$.
c) *(1P)* $\lambda = 0$, $T = 1$.
d) *(1P)* $\lambda = -1$, $T = 2$.
e) *(1P)* $\lambda = -7$, $T = 3$.