Prof. Dr. Frank Noé
Dr. Christoph Wehmeyer
Tutoren: Anna Dittus, Felix Mann, Dominik Otto

Klausur/Lösung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

Freitag, 17.07.2015, 12:15 - 13:45 Uhr

Aufgabe 1 *(Wissens- und Verständnisfragen, 4 Punkte):*

Beantworten Sie die folgenden Fragen möglichst in einem Satz:
a) *(1)* Wie lautet die Gleichung zur Berechnung der Gewichte der Newton-Côtes-Formeln?
Lösung:

$$\lambda_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_k(x) \, \mathrm{d}x \,, \quad \text{mit} \quad L_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \,, \quad k = 0, \ldots, n \,.$$

b) *(1)* Wie berechnet sich die absolute Kondition der Polynominterpolation?
Lösung: Über die Lebesque-Konstante:

$$\kappa_{\text{abs}} = \Lambda_n = \left\| \sum_{k=0}^{n} |L_k| \right\|_\infty$$

c) *(1)* Warum werden alle punktsymmetrischen Funktionen, d.h. $f(-x) = -f(x)$, auf dem Intervall $[-1, 1]$ durch die globalen Newton-Côtes-Formeln exakt integriert?
Lösung: Es gilt $\lambda_k = \lambda_{n-k}$ und $f(x_k) = -f(x_{n-k})$, und damit folgt

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k) = 0 \,;$$

das Integral einer punktsymmetrischen Funktion über einem symmetrischen Intervall ergibt ebenfalls 0.
d) *(1)* Welche Konvergenzordnung hat das explizite Euler-Verfahren?
Lösung: $p = 1$.

Aufgabe 2 *(Matlab, 7 Punkte)*:

Gegeben sei der folgende Algorithmus

```
function [ p ] = func(x, a, y)
   n = length(a);
   p = a(n);
   for k=n-1:-1:1
      p = p*(y - x(k)) + a(k);
   end
end
```

a) *(1)* Welche Bedeutung hat die Variable `n`?
Lösung: `n` bezeichnet die Anzahl der Elemente im Vektor `a`.
b) *(1)* Welche Werte nimmt die Variable `k` an? Achten Sie dabei auf die Reihenfolge.
Lösung: `k` durchläuft die Werte $n-1$, $n-2$, $\dots$, 2, 1.
c) *(1)* Welches mathematische Verfahren ist hier implementiert?
Lösung: Das Horner-Schema.
d) *(3)* Welche Bedeutung haben die Variablen `x`, `a` und `y`?
Lösung: Der Vektor `x` entspricht den Stützstellen x_k, $k = 1, \dots, n$; der Vektor `a` entspricht den Koeffizienten a_k, $k = 1, \dots, n$; der Skalar `y` entspricht der Auswertungsstelle x^*.
e) *(1)* Was genau befindet sich bei Rückgabe in der Variablen `p`?
Lösung: Der Wert des Polynoms an der Stelle x^*.

Aufgabe 3 *(Polynominterpolation nach Newton, 5 Punkte):*

Gegeben seien die Funktionswerte

$$f(x_0) = 1\,, \quad f(x_1) = 2\,, \quad f(x_2) = 9\,,$$

zu den Stützstellen

$$x_0 = 0\,, \quad x_1 = 1\,, \quad x_2 = 2\,.$$

a) *(3)* Führen Sie für diese Wertepaare eine Polynominterpolation nach Newton durch, d.h., berechnen Sie die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 der Newtondarstellung mit Hilfe der Newtonschen dividierten Differenzen.

Lösung: Mit dem Neville-Algorithmus gilt

$$\begin{array}{lll} f[0] = 1 & & \\ f[1] = 2 & f[0,1] = \frac{2-1}{1-0} = 1 & \\ f[2] = 9 & f[1,2] = \frac{9-2}{2-1} = 7 & f[0,1,2] = \frac{7-1}{2-0} = 3 \end{array}$$

und damit $a_0 = f[0] = 1$, $a_1 = f[0,1] = 1$, und $a_2 = f[0,1,2] = 3$.

b) *(2)* Geben Sie das Interpolationspolynom in der Newton- und der Monomdarstellung an.

Lösung: Newtondarstellung:

$$p_2(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{2} a_i \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) = 1 + x + 3x(x-1)$$

Monomdarstellung (durch ausmultiplizieren):

$$p_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \tilde{a}_k x^k = 3x^2 - 2x + 1$$

Aufgabe 4 *(Konsistenzordnung des impliziten Euler-Verfahrens, 6 Punkte):*

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lambda x(t) + f(t)\,, \quad 0 < t \le T\,, \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

mit $x_0, \lambda \in \mathbb{R}$ und $f : [0,T] \to \mathbb{R}$.
a) *(1)* Begründen Sie, warum die Darstellung

$$x(t) = x(t+\tau) - \tau x'(t+\tau) + \frac{\tau^2}{2} x''(\xi(t))\,, \quad \xi(t) \in (t, t+\tau)\,, \quad \tau > 0\,,$$

der exakten Lösung des AWPs korrekt ist.
Lösung: Es handelt sich um eine Taylor-Entwicklung um $t+\tau$ mit Restglied.
b) *(2)* Zeigen Sie mit Hilfe von (a) die folgende Darstellung der exakten Lösung des AWPs:

$$x(t+\tau) = \frac{1}{1-\lambda\tau} \left(x(t) + \tau f(t+\tau) - \frac{\tau^2}{2} x''(\xi(t)) \right) .$$

Lösung: Einsetzen der DGL in die Taylor-Entwicklung liefert

$$x(t) = x(t+\tau) - \tau \left(\lambda x(t+\tau) + f(t+\tau)\right) + \frac{\tau^2}{2} x''(\xi)\,.$$

Umstellen nach $x(t+\tau)$ liefert die Behauptung.
c) *(3)* Zeigen Sie, dass das implizite Euler-Verfahren

$$x_\Delta(t+\tau) = x(t) + \tau \left(\lambda x_\Delta(t+\tau) + f(t+\tau)\right)$$

konsistent ist mit Konsistenzordnung $p = 1$, d.h. zeigen Sie:
Wenn es ein $\tau_0 > 0$ und ein von τ unabhängiges $C \in \mathbb{R}$ gibt, dann gilt:

$$\max_{k=0,\dots,n-1} |x(t_k+\tau) - x_\Delta(t_k+\tau)| \le C\tau^{p+1} \quad \forall \tau < \tau_0\,,$$

mit $t_k = k\tau$, $k = 0, \dots, n-1$.

Lösung: Der Ausdruck $x(t_k+\tau) - x_\Delta(t_k+\tau)$ heißt Konsistenzfehler, $\epsilon(t_k,\tau)$, und ist durch

$$\epsilon(t,\tau) = x(t+\tau) - x_\Delta(t+\tau) = \frac{x(t) + \tau f(t+\tau) - \frac{1}{2}\tau^2 x''(\xi)}{1-\lambda\tau} - \frac{x(t)+\tau f(t+\tau)}{1-\lambda\tau} = \frac{-1}{1-\lambda\tau}\frac{\tau^2}{2}x''(\xi)$$

gegeben (Taylor-Entwicklung der exakten Lösung minus Euler-Schritt ausgehend von $x(t)$). Mit $t = t_k$, $k = 0,\ldots,n-1$, folgt

$$\max_{k=0,\ldots,n-1} |\epsilon(t_k,\tau)| = \max_{k=0,\ldots,n-1} \left| \frac{-1}{1-\lambda\tau}\frac{\tau^2}{2}x''(\xi_k) \right| = \frac{1}{1-\lambda\tau}\frac{\tau^2}{2} \max_{k=0,\ldots,n-1} \left|x''(\xi_k)\right| \le \frac{1}{1-\lambda\tau}\frac{\tau^2}{2}\left\|x''\right\|_\infty$$

Für passend gewähltes $0 < \tau_0$, $\lambda \le 0$, bzw. $0 < \tau_0 < \frac{1}{\lambda}$, $\lambda > 0$, gilt

$$\frac{1}{1-\lambda\tau}\frac{1}{2}\left\|x''\right\|_\infty \le \frac{1}{1-|\lambda|\tau_0}\frac{1}{2}\left\|x''\right\|_\infty = C$$

und damit

$$\max_{k=0,\ldots,n-1} |\epsilon(t_k,\tau)| \le C\tau^{p+1}\,, \quad p = 1\,,$$

für alle $\tau < \tau_0$.