Kondition linearer Gleichungssysteme

Konvergenz in normierten Räumen

Definition: $x^{(\nu)} \to x \quad \Longleftrightarrow \quad \|x - x^{(\nu)}\| \to 0, \qquad$ für $\nu \to \infty$

Satz: Die Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{n,n}$ ist äquivalent zur komponentenweise Konvergenz.

Existenz und Eindeutigkeit:

Reguläre und singuläre Matrizen. Inverse Matrix.

Die Regularität von A ist äquivalent zur Existenz eindeutig bestimmter Lösungen.

Störungen von Koeffizientenmatrix A und rechter Seite b:

Normweiser absoluter und relativer Fehler.

Definition: $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ heißt Kondition von A. Beispiele.

Satz: $\kappa(A)$ ist der maximale Verstärkungsfaktor des rel. Fehlers bei Störungen von b.

Satz: $\kappa(A)$ ist der maximale Verstärkungsfaktor des rel. Fehlers bei Störungen von A.

Satz: $\kappa(A)$ ist der maximale Verstärkungsfaktor des rel. Fehlers bei Störungen von A, b.

Numerische Beispiele.

Auswirkungen von Störungen von A und b

Satz 9.12 Sei x die Lösung von $Ax = b$, $b \neq 0$, und $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Systems

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$$

mit $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\|A - \tilde{A}\|/\|A\| < 1/\kappa(A)$ sowie $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \left(\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \right) + o(\|A - \tilde{A}\| + \|b - \tilde{b}\|) \; .$$

Es existieren rechte Seiten b, $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ und Matrizen A, $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, so daß in dieser Abschätzung Gleichheit vorliegt.

Die Kondition als Quantifizierung der Regularität

singulären Matrizen: $\mathcal{S} := \{M \subset \mathbb{R}^{n,n} \mid M \text{ singulär}\} \subset \mathbb{R}^{n,n}$

relativer Abstand von $A \neq 0$ zu $\mathcal{S}$: $\text{dist}(A, \mathcal{S}) := \inf \left\{ \frac{\|A-B\|}{\|A\|} \,\middle|\, B \in \mathcal{S} \right\}$

Satz 9.9 Für alle regulären Matrizen A gilt

$$\text{dist}(A, \mathcal{S}) \geq \frac{1}{\kappa(A)} \ .$$

Folgerung:

A „fast singulär“, d.h. $\text{dist}(A, \mathcal{S})$ klein $\implies$ $\kappa(A)$ groß!

Beispiel: Schleifender Schnitt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\kappa_\infty = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = (2+\varepsilon)\varepsilon^{-1}(2+\varepsilon) = \frac{(2+\varepsilon)^2}{\varepsilon} \to \infty \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 + \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} & 1 \\ -1 - \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} & 1+\varepsilon \end{pmatrix} \in \mathcal{S}, \qquad \frac{\|A-B\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \frac{1}{\kappa_\infty(A)}$$

Bemerkung: Allgemein ex. ein $B \in \mathcal{S}$ mit $\text{dist}_\infty(A, \mathcal{S}) = \frac{\|A-B\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \frac{1}{\kappa_\infty(A)}$

Folgerung: Schlecht konditionierte Matrizen sind „fast singulär“!

Problem und Algorithmus

Problem: Löse das lineare Gleichungssystem $Ax = b$

Auswertung des Lösungsoperators $f(A,b) = A^{-1}b$ zu Daten $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Satz 9.12 Relative Kondition des Problems $\kappa_{\text{rel}} = \kappa(A)$

Algorithmus: Zerlegung des Lösungsoperators in Elementaroperationen

$$x = A^{-1}b = G_m \circ \cdots \circ G_1(A,b)$$

Qualitätskriterien: Aufwand und Stabilität

Lineare Gleichungssysteme

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad x \quad = \quad b$$

erweiterte Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & -1 \\ 3 & 6 & 10 & 0 \end{array}\right)$$

Gaußscher Algorithmus

eliminieren von x_1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & -1 \\ 3 & 6 & 10 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 * 1.\ \text{Zeile} \\ -3 * 1.\ \text{Zeile} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \\ 0 & -6 & -11 & -15 \end{array}\right)$$

eliminieren von x_2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \\ 0 & -6 & -11 & -15 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2 * 2.\ \text{Zeile} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Gestaffeltes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$R \qquad x = z$$

Lösung durch Rückwärtssubstitution:

$$\begin{pmatrix} x_1 & +4x_2 & +7x_3 \\ & -3x_2 & -6x_3 \\ & & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix} \implies x = \begin{pmatrix} -8/3 \\ -31/3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Gesetz oder Zufall?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$L \qquad\qquad R \qquad\qquad = \qquad\qquad A$$

LR–Zerlegung

Der 1. Eliminationsschritt

Voraussetzung: Pivotelement $a_{11} \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right)$$

$$(A|b) = (A^{(0)}|b^{(0)}) \qquad\qquad (A^{(1)}|b^{(1)})$$

Berechnung von $(A^{(0)}|b^{(0)}) \rightarrow (A^{(1)}|b^{(1)})$:

$$a_{1j}^{(1)} = a_{1j}\,, \qquad b_1^{(1)} = b_1\,, \qquad j = 1, \ldots, n\,,$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \ell_{i1} a_{1j}\,, \qquad b_i^{(1)} = b_i - \ell_{i1} b_i\,, \qquad \ell_{i1} := \frac{a_{i1}}{a_{11}}\,, \qquad i, j = 2, \ldots, n\,,$$

Gaußsche Elimination (Algorithmus 9.12)

for $k = 1 : n-1$ do

$\{$

for $i = k+1 : n$ do (falls $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0!$)

$\{$

$$\ell_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\ ; \qquad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \ell_{ik} b_k^{(k-1)}\ ; \qquad a_{ik}^{(k)} = 0\ ;$$

for $j = k+1 : n$ do

$\{$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \ell_{ik} a_{kj}^{(k-1)}\ ;$$

$\}$

$\}$

$\}$

Rückwärtssubstitution

Gestaffeltes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & \cdots & a_{2n}^{(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{(n-1)} \\ b_2^{(n-1)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Algorithmus 10.2 (Rückwärtssubstitution)

$$x_n = \tfrac{1}{a_{nn}^{(n-1)}} b_n^{(n-1)}$$

for $i = n-1 : (-1) : 1$ do

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(n-1)}} \left(b_i^{(n-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(n-1)} x_j \right)$$

Carl Friedrich Gauß (1777–1855)

Carl Friedrich Gauß im Jahre 1828

1799	Promotion (Hauptsatz der Algebra)
1801	Disquisitiones Arithmeticae (Kongruenzen, ...)
1801	Berechnung der Ceres–Bahn (Fehlerquadrate, Gaußscher Algorithmus)
1807	Direktor der Göttinger Sternwarte
1818	Vermessung des Königreichs Hannover (bis 1830 ca. 70 Arbeiten zu Geodäsie)
1832	Erforschung des Erdmagnetismus (Potentialtheorie, Gaußscher Satz, ...) 1840-1843 Antarktis–Expedition der Royal Society (James Clarke Ross) angeregt von Gauß, Weber und Humboldt Feldstärke des Erdmagnetfelds $\approx$ 1 Gauß

Eliminationsmatrizen

$$G_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ell_{k+1,k} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ell_{n,k} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \ell_{i,k} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

Lemma 10.3: Mit $A^{(0)} = A$ und $b^{(0)} = b$ gilt

$$A^{(k)} = (I - G_k)A^{(k-1)}, \quad b^{(k)} = (I - G_k)b^{(k-1)}, \qquad k = 1, \ldots, n-1 .$$

LR–Zerlegung von A

Satz 10.4 Ist der Gaußsche Algorithmus für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ durchführbar (d.h. erhält man Pivotelemente $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$) und ergeben sich dabei die Eliminationsmatrizen $G_1, \dots, G_{n-1}$, so gilt

$$A = LR \quad \text{mit} \quad L = I + \sum_{k=1}^{n-1} G_k \,, \qquad R = \prod_{k=1}^{n-1} (I - G_{n-k}) A$$

und

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ell_{n1} & \cdots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} , \quad R = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n-1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} .$$

Aufwandsbetrachtungen

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwand des Gaußschen Algorithmus:

Aufwand des Eliminationsschritts:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \left(1 + \sum_{j=k+1}^{n} 1\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} 1$$
$$= \frac{1}{3}(n^3 - n) + \frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Aufwand der Rücksubstitution:

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 + \sum_{j=i+1}^{n} 1\right) = \sum_{i=1}^{n}(n - i + 1) = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}(n^2 + n)$$

Gesamtaufwand: $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n = \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$

Lösung von $Ax = b$ mit LR–Zerlegung

Gauß–Elimination: Berechnung von $A = LR$ Aufwand: $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$

Vorwärtssubstitution: Löse $Lz = b$ $\mathcal{O}(n^2)$

Rückwärtssubstitution: Löse $Rx = z$ $\mathcal{O}(n^2)$

Viele Systeme mit verschiedenen rechten Seiten:

$$Ax^j = b^j, \quad j = 1, \ldots, J, \qquad \text{Aufwand:} \quad \frac{1}{3}n^3 + J \cdot \mathcal{O}(n^2)$$

Ausnutzen von Spezialstruktur: Tridiagonalmatrizen

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

Beobachtung: $\quad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \ell_{ik} a_{kj}^{(k-1)} = 0 - 0, \quad i > k+1$

Thomas-Algorithmus: $\quad a_{ij}^{(k)} =: 0 \;\; i > k+1 \quad \Longrightarrow \quad$ Aufwand: $5n-4 = \mathcal{O}(n)$