Vektor– und Matrixnormen

Grundlagen:

Matrix–Vektor– und Matrixprodukt. Lineare Räume. Beispiele.

Problem:

Berechne die Lösung x von $Ax = b$ zu gegebenem $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

Ziele: Konditionsanalyse dieses Problems, Stabilitätsanalyse des Gaußschen Algorithmus.

Normen auf linearen Räumen:

Motivation: Erweiterung des Betrags von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{n,n}$.
Definition: Axiomatisierung des Längenbegriffs. Beispiele: $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, auf $\mathbb{R}^n$.
Zu einer gegebenen Vektornorm $\|\cdot\|$ gehörige Matrixnorm:

$$\|A\|_M = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\,, \qquad A \in \mathbb{R}^{n,n}\,.$$

Beispiel: Zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ gehört die Zeilensummenorm.

Normen

Definition 8.1 Es sei V ein linearer Raum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : \; V \to \mathbb{R}$$

heißt Norm, falls für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|x\| \geq 0 \;, \qquad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;, \tag{1}$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \; \|x\| \qquad \text{(Homogenität)} \;, \tag{2}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \;. \tag{3}$$

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum.

Beispiele: Vektornormen

$x = (x_i)_{i=1}^n \in V = \mathbb{R}^n$

Euklidische Norm: $$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

p–Norm: $$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad , \quad 1 \leq p < \infty$$

Maximumsnorm (∞–Norm): $$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

Matrixnormen

$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in V = \mathbb{R}^{n,n}$, Matrizen mit n Zeilen und n Spalten

jede Vektornorm auf $\mathbb{R}^{n^2}$ induziert Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n,n}$
(interpretiere $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ als Vektor im $\mathbb{R}^{n^2}$)

Verträglichkeit der Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ mit Matrix–Vektor–Multiplikation:

$$\|Ax\| \leq \|A\|_M \|x\|$$

$\|A\|_M$ ist eine obere Schranke für die Längenänderung.

Die von einer Vektornorm induzierte Matrixnorm

Definition 8.8 Es sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist durch

$$\|A\|_M = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \qquad A \in \mathbb{R}^{n,n},$$

die zugehörige Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ definiert.

Bemerkung: Für zugehörige Matrixnormen gilt

- $\|\cdot\|_M$ ist eine Norm.
- $\|Ax\| \le \|A\|_M \, \|x\|$
- $\|AB\|_M \le \|A\|_M \, \|B\|_M \qquad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$, (Submultiplikativität)
- Die Norm der Einheitsmatrix I ist $\|I\|_M = 1$.

Die von der Maximumsnorm induzierte Matrixnorm

Satz 8.10 (Zeilensummennorm) Die Matrixnorm

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ , \qquad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n,n} \ ,$$

gehört zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung:
Es sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Vektornorm und $\|\cdot\|_M$ die zugehörige Matrixnorm.
Dann existiert ein $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x^*\| = 1$ und $\|Ax^*\| = \|A\|_M$.

Konvergenz in normierten Räumen

Definition 8.4 Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $\left(x^{(\nu)}\right)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Folge. Die Folge heißt konvergent gegen $x \in V$, also

$$x^{(\nu)} \to x \ , \qquad \nu \to \infty \ ,$$

falls

$$\|x - x^{(\nu)}\| \to 0 \ , \qquad \nu \to \infty \ .$$

Beispiel: $V = \mathbb{R}^n$, Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$

$$\left(x^{(\nu)}\right)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \to x \in \mathbb{R}^n \quad \Longleftrightarrow \quad x_i^{(\nu)} \to x_i \ , \ \ i = 1, \ldots, n$$

Äquivalenz von Normen auf endl.-dim. Räumen

Satz 8.5 Es sei V ein endlichdimensionaler linearer Raum und $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ Normen auf V. Dann existieren $c, C \in \mathbb{R}$, so daß

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\| \qquad \forall x \in V \ .$$

Beweis:
Satz von Heine-Borel: Kompaktheit der Einheitskugel in endl-dim. Räumen.

Folgerungen: $V = \mathbb{R}^n$ mit beliebiger Norm $\|\cdot\|$ und $|||\cdot||| = \|\cdot\|_\infty$

$$x^{(\nu)} \to x \Leftrightarrow \|x^{(\nu)} - x\| \to 0 \Leftrightarrow \|x^{(\nu)} - x\|_\infty \to 0 \Leftrightarrow x_i^{(\nu)} \to x_i \ , \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \frac{C}{c} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{C}{c}\|A\|_\infty < \infty$$

Lineare Gleichungssysteme

$n = 3$ lineare Gleichungen für $n = 3$ Unbekannte:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \end{array}$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad x = b$$

Existenz und Eindeutigkeit

Satz 9.1 Die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt regulär, falls

$$Ax \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \; , \quad x \neq 0 \; ,$$

andernfalls singulär.
Ist A regulär, so existiert eine eindeutig bestimmte Inverse $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$ von A mit der Eigenschaft

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \; ,$$

und das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

hat für jede rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x = A^{-1}b$.

Kondition

Problem:

$\boxed{\text{Berechne } x \in \mathbb{R}^n \text{ aus } Ax = b \text{ zu gegebenen Daten } A \in \mathbb{R}^{n,n},\ b \in \mathbb{R}^n}$

Funktionsauswertung:

$\boxed{\text{Auswertung von } x = f(A,b) = A^{-1}b \in \mathbb{R}^n \text{ für } A \in \mathbb{R}^{n,n},\ b \in \mathbb{R}^n}$

Lösungsoperator: $f(A,b) = A^{-1}b$ nicht explizit gegeben

Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{b} \approx b$ auf das Ergebnis $\tilde{x}$

Fehlermaß

normweiser absoluter Fehler:

$$\|x - \tilde{x}\| \,, \qquad x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$$

Beispiel:

$$x = (0.5, 123)^T, \;\; \tilde{x} = (1, 100)^T \,, \quad \|x - \tilde{x}\|_\infty = \max\{0.5,\; 23\} = 23$$

normweiser relativer Fehler:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \,, \qquad x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n \,, \quad x \neq 0$$

Beispiel:

$$x = (0.5, 123)^T, \;\; \tilde{x} = (1, 100)^T \,, \quad \frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{\max\{0.5,\, 23\}}{123} \approx 0.186$$

Die Kondition einer Matrix

Definition 9.2 Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Ist A eine reguläre Matrix, so heißt

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Kondition von A. Ist A singulär, so wird $\kappa(A) = \infty$ gesetzt.

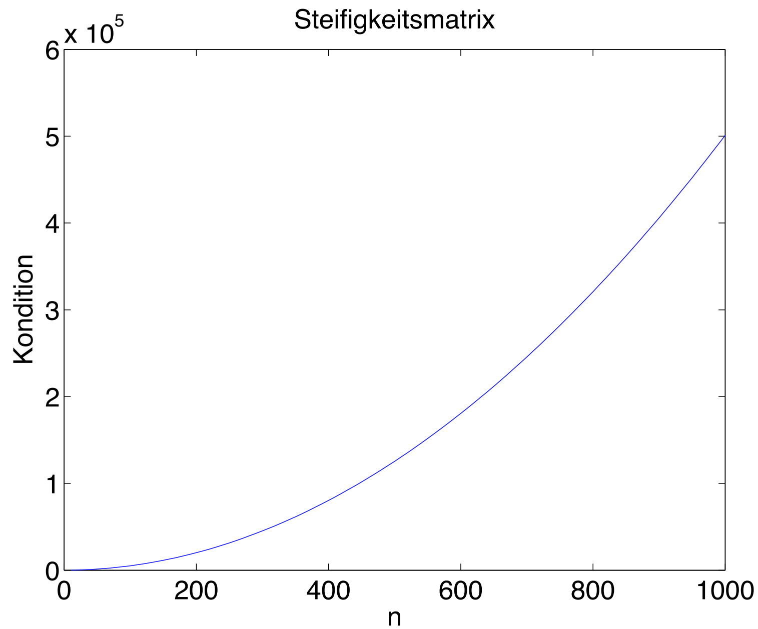
Bemerkung: Es gilt

- $\kappa(A) \geq 1$ und $\kappa(I) = 1$
- $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$

Beispiel: Differenzenverfahren für ein Randwertproblem

$$-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1} = h^2 f(x_i), \qquad i = 1, \dots, n, \qquad h = 1/(n+1)$$

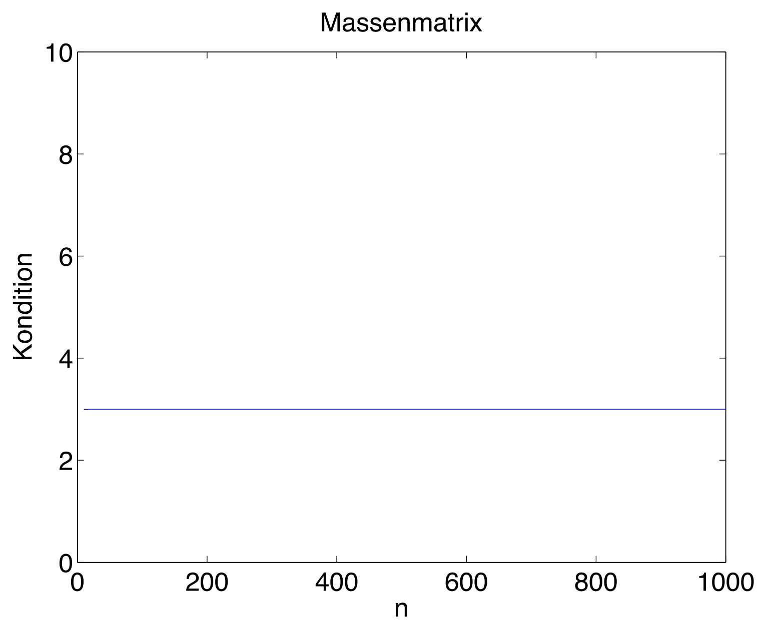
$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$



Kondition: $\kappa_\infty(A_n) = \|A_n\|_\infty \|A_n^{-1}\|_\infty$

Beispiel: Massenmatrix (Bestapproximation)

$$M_n = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$



Kondition: $\kappa_\infty(M_n) = \|M_n\|_\infty \|M_n^{-1}\|_\infty$

Auswirkungen von Störungen der rechten Seite b

Satz 9.4 Sei x die Lösung von $Ax = b$, $b \neq 0$, und $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Systems

$$A\tilde{x} = \tilde{b}$$

mit beliebigem $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \, \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \; .$$

Es existieren rechte Seiten $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$, so daß in dieser Abschätzung Gleichheit vorliegt.

Störungen der Koeffizientenmatrix A

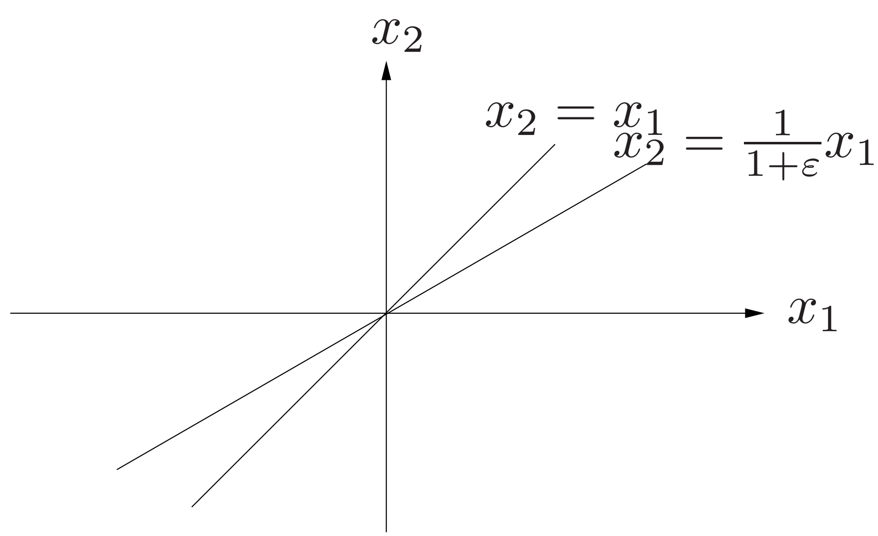
gestörtes System: $\tilde{A}\tilde{x} = b$, $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$

Existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $\tilde{x}$?

Beispiel (schleifender Schnitt):

reguläre Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$



Runden im Falle $\varepsilon < eps$:

$$\tilde{A} = \mathrm{rd}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$ singulär!

Kleine Störungen erhalten die Regularität

Lemma 9.5 Es sei $C \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\|C\| < 1$.
Dann ist $I - C$ regulär, und es gilt

$$(I - C)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} C^k \qquad \text{(Neumannsche Reihe).}$$

Folgerung:

$$\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} < \frac{1}{\kappa(A)} \iff \|A - \tilde{A}\|\|A^{-1}\| < 1$$

$$\implies \quad \tilde{A} \text{ regulär!}$$

Auswirkungen von Störungen der Koeffizientenmatrix A

Satz 9.6 Sei x die Lösung von $Ax = b$, $b \neq 0$, und $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Systems

$$\tilde{A}\tilde{x} = b$$

mit $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\|A - \tilde{A}\|\|A^{-1}\| < 1$. Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} + o(\|A - \tilde{A}\|) \; .$$

Es existieren Koeffizientenmatrizen A, $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, so daß in dieser Abschätzung Gleichheit vorliegt.

Beweis: Skript

Numerisches Beispiel: Störung von A

exaktes System: $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

gerundete Koeffizientenmatrix: $\tilde{A}\tilde{x} = b,\qquad \|A^{-1}\|_\infty \|A - \tilde{A}\|_\infty = 0.3672$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -100 \end{pmatrix} \qquad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 8.5 \\ 9.2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Auswirkungen von Störungen von A und b

Satz 9.7 Sei x die Lösung von $Ax = b$, $b \neq 0$, und $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Systems

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$$

mit $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\|A - \tilde{A}\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ sowie $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \left(\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \right) + o(\|A - \tilde{A}\| + \|b - \tilde{b}\|) \; .$$

Es existieren rechte Seiten b, $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ und Koeffizientenmatrizen A, $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, so daß in dieser Abschätzung Gleichheit vorliegt.

Beweis: Übung

Numerisches Beispiel: Störung von A und b

exaktes System: $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

gerundetes System: $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -100 \end{pmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -3000 \end{pmatrix} \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$