Prof. Dr. Frank Noé
Dr. Christoph Wehmeyer
Tutoren:
Katharina Colditz; Anna Dittus;
Felix Mann; Christopher Pütz

9. Übung zur Vorlesung **Computerorientierte Mathematik I**

Abgabe: Freitag, 16.01.2015, 16:00 Uhr, Tutorenfächer Arnimallee 3

`http://www.mi.fu-berlin.de/w/CompMolBio/ComaI`

Aufgabe 1 *(Singuläre Matrizen, 3T):*

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär.
a) *(1T)* Zeigen Sie, dass für beliebiges $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, folgende Abschätzung gilt:

$$\frac{\|A-B\|}{\|A\|} \quad \geq \quad \frac{\|(A-B)x\|}{\|A\|\|x\|}.$$

b) *(1T)* Sei nun B singulär. Zeigen Sie, dass es einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gibt, sodass

$$\frac{\|(A-B)x\|}{\|A\|\|x\|} \quad = \quad \frac{\|A^{-1}\|\|Ax\|}{\|A\|\|A^{-1}\|\|x\|}.$$

c) *(1T)* Folgern Sie nun, dass für singuläres B die Abschätzung

$$\frac{\|A-B\|}{\|A\|} \quad \geq \quad \frac{1}{\kappa(A)}$$

gilt.

Aufgabe 2 *(Kondition einer Matrix, 7T):*

Sei A eine reguläre $n \times n$-Matrix.
a) *(1T)* Sei $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{x}_0\| = 1$ so gewählt, dass

$$\|A\mathbf{x}_0\| \quad = \quad \min_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|,$$

und bezeichne dieses Minimum mit $\sigma := \|A\mathbf{x}_0\|$. Definiere $\mathbf{y}_0 := \frac{1}{\sigma}A\mathbf{x}_0$. Zeigen Sie, dass $\|\mathbf{y}_0\| = 1$ und $\|A^{-1}\mathbf{y}_0\| = \frac{1}{\sigma}$.
b) *(4T)* Zeigen Sie, dass es kein $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{x}\| = 1$ geben kann, sodass

$$\|A^{-1}\mathbf{x}\| \quad > \quad \frac{1}{\sigma}$$

gilt.
c) *(2T)* Folgern Sie, dass die Kondition der Matrix A durch

$$\kappa(A) \quad = \quad \frac{\max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|}{\min_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|}$$

berechnet werden kann.

Aufgabe 3 *(Hilbert-Matrix, 7P):*

Das Paradebeispiel einer schlecht konditionierten Matrix ist die Hilbert-Matrix $H_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Einträgen

$$h_{ij} \quad = \quad \frac{1}{i+j-1}, \; i, j = 1, \ldots, n.$$

In Matlab können Sie die Hilbert-Matrix direkt durch den Befehl **hilb(n)** erzeugen. Schreiben Sie ein Programm, dass für $n = 1, 2, \ldots, 15$ die Hilbert-Matrix H_n und die rechte Seite $\mathbf{b}_n$ erzeugt, wobei $\mathbf{b}_n$ der erste Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$ ist, also derjenige Vektor, dessen erster Eintrag Eins ist und alle anderen Einträge gleich Null sind. Danach sollen die linearen Systeme

$$\begin{aligned} H_n\mathbf{x} &= \mathbf{b}_n \\ \sqrt{2}H_n\mathbf{x} &= \sqrt{2}\mathbf{b}_n \end{aligned}$$

nacheinander gelöst werden. Dazu können Sie den Backslash-Operator $\backslash$ verwenden. Berechnen Sie jeweils den relativen Fehler in der 2-Norm zwischen den beiden Lösungen und plotten Sie diesen über n. Berechnen Sie auch jeweils die Konditionszahl $\kappa(H_n)$ mit Hilfe von **cond** und plotten Sie auch die Kondition über n. Was geschieht und warum?