Prof. Dr. Frank Noé
Dr. Christoph Wehmeyer
Tutoren:
Katharina Colditz; Anna Dittus;
Felix Mann; Christopher Pütz

8. Übung zur Vorlesung
Computerorientierte Mathematik I

Abgabe: Freitag, 19.12.2014, 16:00 Uhr, Tutorenfächer Arnimallee 3

`http://www.mi.fu-berlin.de/w/CompMolBio/ComaI`

Aufgabe 1 *(Summennorm, 3T):*

Für einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ definiert man die ℓ^1-Norm (oder 1-Norm oder Summennorm) durch:

$$\|\mathbf{x}\|_1 \quad := \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

also durch die Summe seiner Einträge im Absolutwert. Zeigen Sie, dass $\|\mathbf{x}\|_1$ tatsächlich eine Norm ist.

Aufgabe 2 *(Spaltensummennorm, 7T):*

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bezeichnen wir die folgende Norm:

$$\|A\|_1 \quad := \quad \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

als Spaltensummennorm. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass $\|A\|_1$ die von der ℓ^1-Norm (Aufgabe 1) induzierte Matrixnorm ist, und die Schreibweise damit gerechtfertigt ist. Achtung: Wir verwenden die gleiche Schreibweise für Matrizen und Vektoren, d.h. für eine Matrix bezeichnet $\|A\|_1$ die Spaltensummennorm, für einen Vektor steht $\|\mathbf{x}\|_1$ für die ℓ^1-Norm.

a) *(3T)* Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$ gilt, dass:

$$\|A\mathbf{x}\|_1 \quad \leq \quad \|A\|_1.$$

b) *(2T)* Sei für festes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die natürliche Zahl k so gewählt, dass $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|$. Zeigen Sie, dass für den k-ten Einheitsvektor $\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass

$$\|A\mathbf{e}_k\|_1 \quad = \quad \|A\|_1.$$

Dabei ist $\mathbf{e}_k$ der Vektor, dessen k-ter Eintrag gleich 1 ist, alle übrigen Einträge sind gleich 0.

c) *(2T)* Folgern Sie aus a) und b), dass die Spaltensummennorm tatsächlich die von der ℓ^1-Norm induzierte Matrixnorm ist.

Aufgabe 3 *(Ableiten, 5P):*

In vielen Anwendungsproblemen müssen Ableitungen numerisch berechnet werden, da es keine geschlossene Form zur Berechnung der Ableitung gibt. Zur Approximation der Ableitung kann man den bekannten Differenzenquotienten

$$df(h) \quad = \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

verwenden, da dieser im Grenzwert $h \to 0$ gegen $f'(x_0)$ konvergiert. Die Wirklichkeit sieht aber oft anders aus. Schreiben Sie zur Illustration ein Programm, welches die Ableitungen der Funktion $f(x) = \arctan(x)$ an den Stellen $x_0 = 0, 1, 10, 50, 100$ mit Hilfe des Differenzenquotienten zu berechnen versucht. Die analytische Formel für die Ableitung der Funktion f ist

$$f'(x_0) = \frac{1}{1 + x_0^2}.$$

Berechnen Sie für jedes x_0 den Differenzenquotienten $df(h)$ für $h = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots, 10^{-10}$. Plotten Sie den relativen Fehler

$$\frac{|df(h) - f'(x_0)|}{|f'(x_0)|}$$

in einen logarithmischen Plot (Befehl **loglog**). Plotten Sie die Fehlerkurven für alle Werte von x_0 in eine Graphik. Was passiert und warum?