Prof. Dr. Frank Noé
Dr. Christoph Wehmeyer
Tutoren:
Katharina Colditz; Anna Dittus;
Felix Mann; Christopher Pütz

5. Übung zur Vorlesung
Computerorientierte Mathematik I

Abgabe: Freitag, 28.11.2014, 16:00 Uhr, Tutorenfächer Arnimallee 3

`http://www.mi.fu-berlin.de/w/CompMolBio/ComaI`

Aufgabe 1 *(Torschuss I, 8T):*

Wir wollen das in der Vorlesung skizzierte Torschussproblem konkret lösen. Sie kennen die Formel für die Überflughöhe

$$H(v) = x_0 - g\frac{x_0^2}{v^2},$$

mit dem Abstand zum Tor $x_0 = 16\text{m}$, der Erdbeschleunigung $g = 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und der Anfangsgeschwindigkeit v in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Der Mittelpunkt der Torlatte befindet sich in $h_0 = 2.50\text{m}$ Höhe.

1. Stellen Sie die Gleichung $H(v_0) = h_0$ nach v_0 um und zeigen Sie damit, dass die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \approx 13.6392\frac{\text{m}}{\text{s}}$ genau zum Lattentreffer in $h_0 = 2.50\text{m}$ Höhe führt.

2. Zeigen Sie, dass die absolute Kondition der Funktion H im Punkt v_0 durch den Wert

$$\begin{aligned}\kappa_{abs}(v_0) &= \frac{2(x_0 - h_0)^{3/2}}{\sqrt{g}x_0} \\ &\approx 1.9796\text{s}\end{aligned}$$

gegeben ist.

3. Für kleine Störungen Δv in der Anfangsgeschwindigkeit gilt die Abschätzung

$$\Delta h \leq \kappa_{abs}(v_0)\Delta v$$

für die Abweichung in der Überflughöhe $\Delta h = |h_0 - H(v_0 + \Delta v)|$. Benutzen Sie diese Abschätzung, um Δv so zu wählen, dass $\Delta h \leq \text{tol} = 0.04\text{m}$ gilt. In diesem Fall würde der Ball noch immer die Torlatte treffen und zurückspringen. Lösung: $\Delta v \leq 0.0202\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Aufgabe 2 *(Torschuss II, 10P):*

a) Mit Hilfe des Befehls **randn(1,n)** können Sie sich einen Vektor der Länge n erzeugen, der normalverteilte Zufallszahlen enthält. Diese Zahlen haben u.a. die Eigenschaft, dass ihr Mittelwert für $n \to \infty$ gegen Null läuft und ihre durchschnittliche quadratische Abweichung vom Mittelwert für $n \to \infty$ gegen Eins konvergiert. Schreiben Sie ein Matlab Programm, mit dem Sie sich davon überzeugen können. Das Programm soll $N = 100$ mal einen solchen Zufallsvektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ der Länge $n = 500$ erzeugen und seinen Mittelwert $m(x)$ und quadratische Abweichung $s(x)$ berechnen:

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \\ s(x) &= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m(x))^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Plotten Sie die Werte $m(x)$ und $s(x)$ für alle erzeugten Vektoren in eine Graphik. Wiederholen Sie nun das Experiment für $n = 50.000$. Was können Sie beobachten?

b) Überzeugen Sie sich anhand desselben Experiments davon, dass sie den Mittelwert der Zufallszahlen auf den Wert m verschieben können, indem Sie m zu allen Zufallszahlen hinzuaddieren. Überzeugen Sie sich auch, dass die die quadratische Abweichung um den Faktor s verändern können, indem Sie alle Zufallszahlen mit s multiplizieren. Wählen Sie dazu ein m und ein s (nicht Null und Eins) aus und plotten Sie noch einmal das Ergebnis für $n = 50000$.

c) Kommen wir noch einmal zum Torschussproblem zurück. Nehmen wir einmal an, dass sich die Störungen Δv in der Abschussgeschwindigkeit wie normalverteilte Zufallszahlen mit Mittelwert $v_0 = 13.6392\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und quadratischer Abweichung $\Delta v^0 = 0.28\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ verhalten. Schreiben Sie nun ein Programm, das $n = 50000$ gestörte Abschussgeschwindigkeiten auf diese Art zieht. Berechnen Sie für alle diese Geschwindigkeiten v die Überflughöhe $H(v)$ und ermitteln Sie die relative Anzahl der Lattentreffer, d.h. den Anteil aller v, sodass $|H(v) - h_0| \le 0.04$ gilt.