Prof. Dr. Frank Noé
Dr. Christoph Wehmeyer
Tutoren:
Katharina Colditz; Anna Dittus;
Felix Mann; Christopher Pütz

10. Übung zur Vorlesung **Computerorientierte Mathematik I**

Abgabe: Freitag, 23.01.2015, 16:00 Uhr, Tutorenfächer Arnimallee 3

`http://www.mi.fu-berlin.de/w/CompMolBio/ComaI`

Aufgabe 1 *(LR-Zerlegung, 4T):*

Berechnen Sie mit dem Gauss-Algorithmus die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 8 \\ 12 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie die einzelnen Schritte wie in der Vorlesung besprochen aus und geben Sie die beiden Faktoren am Ende an.

Aufgabe 2 *(Hessenberg-Matrix, 6T):*

Eine quadratische Matrix $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt obere Hessenberg-Matrix, wenn sie fast eine obere Dreiecksmatrix ist, nur die erste Subdiagonale darf noch besetzt sein. In Formeln heißt das, dass

$$h_{ij} = 0, \forall i \geq j+2.$$

a) *(1T)* Bestimmen Sie die Elemente l_{i1}, $i = 2, \ldots, n$ der zugehörigen L-Matrix, die im ersten Schritt des Gauss-Algorithmus berechnet werden. Wie unterscheidet sich die modifizierte Matrix $H^{(1)}$ von der Ausgangsmatrix H? Nehmen Sie hier und im Folgenden an, dass alle auftretenden Pivotelemente nicht verschwinden.
b) *(1T)* Geben Sie eine Formel für die gesamte Matrix L an. Dabei können Sie die Schreibweise $h_{ij}^{(k)}$ für die modifizierte Matrix nach dem k-ten Schritt verwenden.
c) *(4T)* Geben Sie einen besseren Algorithmus (als die Standard Gauss-Elimination) zur Berechnung der LR-Zerlegung einer oberen Hessenberg-Matrix H an. Bestimmen Sie den Rechenaufwand dieses Verfahrens.

Aufgabe 3 *(Gauss-Algorithmus, 8P):*

a) *(7P)* Schreiben Sie drei Matlab-Funktionen, welche die Berechnung der LR-Zerlegung einer Matrix A, die Lösung eines unteren Dreieckssystems $Lx = b$ durch Vorwärts-Substitution, sowie die Lösung eines oberen Dreieckssystems $Rx = b$ durch Rückwärts-Substitution umsetzen.
b) *(1P)* Testen Sie Ihre Funktionen aus Teil a), indem Sie für $n = 2, \ldots, 20$ die Hilbert-Matrix H_n erzeugen und das lineare Gleichungssystem

$$H_n \mathbf{x}_n = \mathbf{b}_n$$

mit Hilfe der LR-Zerlegung lösen. Dabei soll die rechte Seite $\mathbf{b}_n$ einfach der ersten Spalte von H_n entsprechen. Vergleichen Sie jeweils die berechnete Lösung $\mathbf{x}_n$ mit der korrekten Lösung, dem ersten Einheitsvektor

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$