Prof. Dr. Frank Noé
Dr. Christoph Wehmeyer
Tutoren:
Katharina Colditz; Anna Dittus;
Felix Mann; Christopher Pütz

Übungsklausur

Computerorientierte Mathematik I

Lösung

Aufgabe 1 *(Matlab-Code, 7P):*

Welcher Algorithmus wird durch die folgende Matlab-Funktion umgesetzt? Erklären Sie kurz die Bedeutung der Eingabe-Parameter, die wesentlichen Schritte der Funktion, und die Rückgaben.

```
function [m,q,e] = SomeFunction( a,b )

m = a;
n = b;
q = 0;

while n > 0
    r = mod(m,n);
    m = n;
    n = r;
    q = q + 1;
end

phi = (1 + sqrt(5))/2;
e = ceil(log(b)/log(phi)) + 1;

end
```

Lösung

Die Funktion setzt den Euklidischen Algorithmus um *(1P)*. Sie erhält zwei natürliche Zahlen a, b als Übergaben, sodass $\mathrm{ggT}(a, b)$ ausgerechnet werden kann *(1P)*. Zunächst werden zwei Variablen m, n mit den Werten von a, b initialisiert und ein Zähler q mit Null initialisiert. *(1P)*. Gemäß der Vorschrift des Euklidischen Algorithmus wird nun solange der Rest r von m beim Teilen durch n berechnet, und die Ersetzungen $m = n$ und $n = r$ vorgenommen, bis der

Rest verschwindet *(1P)*. Außerdem wird der Zähler für jeden Iterationsschritt erhöht. *(1P)*. Schließlich wird noch die maximal mögliche Anzahl der Schritte e berechnet *(1P)*. Es wird der ggT (m), die tatsächliche Zahl durchgeführter Schritte (q) und die maximal mögliche Zahl (e) zurückgegeben *(1P)*.

Aufgabe 2 *(Richtig oder Falsch, 7T)*:

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.
(i) *(2T)* Die Kondition einer Matrix A ist immer größer oder gleich Eins.
(ii) *(1T)* Ist V ein Vektorraum mit einer Norm $\|\cdot\|$, so gilt für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, dass $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.
(iii) *(1T)* Die Norm einer Matrix A ist ein Maß für die Regularität der Matrix: Je größer die Norm $\|A\|$, desto ähnlicher ist A zu einer singulären Matrix.
(iv) *(1T)* Für eine reguläre Matrix A ist die LR-Zerlegung mit dem Gauss-Algorithmus stets berechenbar.
(v) *(2T)* Die euklidische Norm $\|\mathbf{x}\|_2$ eines Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ erfüllt folgende Beziehung zur Maximumsnorm $\|\mathbf{x}\|_\infty$:

$$\|\mathbf{x}\|_2 \quad \leq \quad \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty.$$

Lösung

(i) Ja, das folgt aus der Submultiplikativität.

$$\begin{aligned} \kappa(A) &= \|A\|\|A^{-1}\| \\ &\geq \|AA^{-1}\| \\ &= 1. \end{aligned}$$

(ii) Nein, das gilt nur für linear abhängige Vektoren.
(iii) Nein, das ist die Kondition.
(iv) Nein, im Fall verschwindender Pivot-Elemente bricht die Gauss-Elimination ab.
(v) Ja, das rechnet man nach:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\left(\max_{i=1,\dots,n} x_i\right)^2 \sum_{i=1}^n 1\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 *(Rechenaufgaben, 6T):*

a) *(4T)* Berechnen Sie die Kondition der Matrix A bzgl. der Maximumsnorm für $\epsilon > 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1+\epsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) *(2T)* Berechnen Sie $13-12$ durch binäre Subtraktion im Zweierkomplement.

Lösung

a)

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\epsilon}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1+\epsilon \end{pmatrix}, \\ \kappa(A) &= (2+\epsilon)\frac{1}{\epsilon}(2+\epsilon) \\ &= \frac{(2+\epsilon)^2}{\epsilon}. \end{aligned}$$

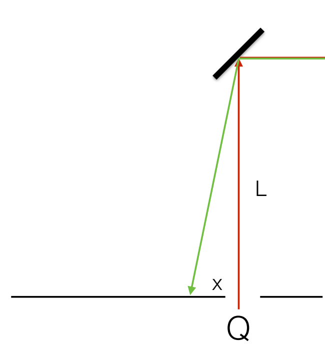
(je ein Punkt für die Inverse, die beiden Normen und die Kondition).
b) *je ein Punkt für die richtigen Darstellungen und die Rechnungen.*

Aufgabe 4 *(Drehspiegelversuch, 6T):*

Mit dem folgenden berühmten Versuch von L. FOUCAULT kann man die Lichtgeschwindigkeit näherungsweise bestimmen: Ein Lichtstrahl wird von der Quelle Q aus durch eine Öffnung im Schirm auf einen Drehspiegel geschickt. Vom Drehspiegel wird der Strahl auf einen Spiegel gelenkt und reflektiert. Rotiert der Drehspiegel sehr schnell, wird der zurückkommende Lichtstrahl von dort nicht zur Quelle zurückgelenkt, da sich der Drehspiegel in der Zeit weitergedreht hat, die das Licht für den Weg zum Spiegel und zurück benötigt hat. Der Lichtstrahl trifft daher in einem Abstand x zur Quelle auf den Schirm, den wir messen können. Man kann nun die Lichtgeschwindigkeit c etwa nach der Formel

$$c = \frac{30 \cdot f \cdot L \cdot S}{x}$$

berechnen, Dabei ist f die Drehfrequenz des Drehspiegels, L ist der Abstand zwischen Quelle und Drehspiegel, und S ist der Abstand zwischen Drehspiegel und Spiegel. Der Vorfaktor 30 ist nicht ganz exakt, der korrekte Wert wäre 8π. Rechnen Sie in dieser Aufgabe bitte mit dem Vorfaktor 30, um die Rechnungen leichter zu machen.



a) *(2T)* Die Lichtgeschwindigkeit beträgt etwa $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Nehmen Sie an, dass der Versuch mit den folgenden Werten ausgeführt wurde: $f = 500\frac{1}{\text{s}}$, $L = 20\text{m}$, $S = 10\text{m}$. Zeigen Sie, dass in einer exakten Messung der Wert $x_0 = 0.01\text{m}$ gemessen werden müsste.
b) *(2T)* Betrachten Sie c als Funktion der Auslenkung x. Berechnen Sie die absolute Kondition $\kappa_{abs}(x_0)$ der Funktion $c(x)$ an der Stelle x_0.
c) *(2T)* Für kleine Messfehler Δx kann der resultierende Fehler $|\Delta c|$ durch die Formel

$$|\Delta c| \quad \leq \quad \kappa_{abs}(x_0)|\Delta x|$$

abgeschätzt werden. Wie groß darf der Messfehler höchstens sein, damit die Lichtgeschwindigkeit auf 3% genau berechnet werden kann?

Lösung

a) Umgestellt nach x ergibt sich

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{30 \cdot f \cdot L \cdot S}{c} \\ &= \frac{30 \cdot 500 \cdot 20 \cdot 10}{3 \cdot 10^8} \\ &= \frac{10^6}{10^8} \\ &= 0.01. \end{aligned}$$

b) Wir benötigen die Ableitung der Funktion $c(x)$ an der Stelle x_0:

$$\begin{aligned} \kappa_{abs}(x_0) &= |c'(x_0)| \\ &= \frac{30 \cdot f \cdot L \cdot S}{x_0^2} \\ &= \frac{3 \cdot 10^6}{10^{-4}} \\ &= 3 \cdot 10^{10}. \end{aligned}$$

c) Eine Abweichung von 3% entspricht $|\Delta c| \leq 9 \cdot 10^6 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Also müssen wir $|\Delta x|$ so bestimmen, dass

$$\begin{aligned} |\Delta x| &\leq \frac{|\Delta c|}{\kappa_{abs}(x_0)} \\ &= \frac{9 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^{10}} \\ &= 3 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Wir müssten also die Ablenkung auf 0.3mm genau messen.