

Computerorientierte Mathematik I

Vektorräume, Vektor- und Matrixnormen

Wiederholung: Charakterisierung von Problemen und Algorithmen

Kondition (Problem)

Wie sensibel reagiert das Problem auf gestörte Eingabedaten?

Stabilität (Algorithmus)

Wie stark können sich Auswertungsfehler aufschaukeln?

Komplexität (Algorithmus)

Welcher Aufwand ist zur Lösung notwendig?

Charakterisierung von Problemen und Algorithmen

Bisher:

$$\begin{aligned} f &: I \rightarrow \mathbb{R}, & I &\subset \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Funktionen mit mehreren Veränderlichen?

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &: D \rightarrow \mathbb{R}^n, & D &\subset \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme

3 Gleichungen mit 3 Unbekannten:

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \end{array}$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A \qquad \mathbf{x} \qquad = \qquad \mathbf{b}$

Matrix-Vektor-Produkt

Definition: Sei A eine Matrix und $\mathbf{x}$ ein Vektor:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n.$$

Dann heißt

$$A\mathbf{x} = ((A\mathbf{x})_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n, \quad (A\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j,$$

Matrix-Vektor-Produkt von A und $\mathbf{x}$.

Matrixprodukt

Definition: Seien A und B Matrizen:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B = (b_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Dann heißt

$$AB = \left((AB)_{ij} \right)_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^n, \quad (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

Matrixprodukt von A und B .

Wo begegnen uns lineare Gleichungssysteme?

Fast überall!

Mathematische Modellierung:

- diskrete stationäre Prozesse

Diskretisierung:

- gewöhnliche/partielle Differentialgleichungen

Linearisierung:

- Newton-Verfahren (Nullstellensuche)

Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme

Problem:

Berechne $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ aus $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ zu gegebenen Daten
 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Eingabefehler: $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{\mathbf{b}} \approx \mathbf{b}$

Kondition

Algorithmus: Gaußscher Algorithmus

Auswirkung von Auswertungsfehlern

Stabilität

Lösungsaufwand

Komplexität

Kondition einer Matrix?

Linearer Raum (Vektorraum)

Definition: Auf einer Menge V seien

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} : V \times V \rightarrow V, \quad \alpha \mathbf{a} : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$$

erklärt, wobei gilt:

- 1) V ist eine Abelsche Gruppe (Assoziativität, Kommutativität, Nullelement, inverses Element).
- 2) Addition und Multiplikation sind verträglich; für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ gilt

$$\begin{aligned} \alpha(\beta \mathbf{a}) &= (\alpha\beta) \mathbf{a} \\ \alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \alpha \mathbf{a} + \alpha \mathbf{b} \\ (\alpha + \beta) \mathbf{a} &= \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{a} \\ 1 \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Assoziativität

Distributivität

Normen

Definition: Es sei V ein linearer Raum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt Norm, falls für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|\mathbf{x}\| \geq 0, \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$$

$$\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

Homogenität

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| . \quad \text{Dreiecksungleichung}$$

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum.

Vektornormen

Beispiel: Sei $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^n \in V = \mathbb{R}^n$.

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Euklidische Norm

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

p -Norm

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

Maximumsnorm

Maximumsnorm

Beispiel: Betrachte $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \geq 0 \quad \checkmark$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \dots = x_n = 0 \quad \checkmark$$

$$\|\alpha \mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |\alpha x_i| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,n} |x_i + y_i| \leq \max_{i=1,\dots,n} (|x_i| + |y_i|) \\ &\leq \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty \quad \checkmark \end{aligned}$$

Matrixnormen

Matrix: $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in V = \mathbb{R}^{n \times n}$

Interpretiere $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ als Vektor im $\mathbb{R}^{n^2}$:

Jede Vektornorm auf $\mathbb{R}^{n^2}$ induziert eine Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n \times n}$

Verträglichkeit:

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\|_M \cdot \|\mathbf{x}\|$$

$\|A\|_M$ ist eine obere Schranke für die Längenänderung!

Die Vektornorm-induzierte Matrixnorm

Definition: Sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist durch

$$\|A\|_M = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{x}\|=1}} \|A\mathbf{x}\|, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

die dazugehörige Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ definiert.

Bemerkung: Für zugehörige Matrixnormen gilt

- 1) $\|\cdot\|_M$ ist eine Norm.
- 2) $\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\|_M \cdot \|\mathbf{x}\|$.
- 3) $\|AB\|_M \leq \|A\|_M \cdot \|B\|_M \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- 4) Die Norm der Einheitsmatrix I ist $\|I\|_M = 1$.

Die Maximumsnorm-induzierte Matrixnorm

Satz: Die Matrixnorm

$$\|A\|_{\infty} = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

gehört zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_{\infty}$ auf $\mathbb{R}^n$ und wird Zeilen-summennorm genannt.

Die Maximumsnorm-induzierte Matrixnorm

Beweis. Wir benutzen die induzierte Darstellung mit $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$.

$$\|A\|_\infty = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{x}\|_\infty = 1}} \|A\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{x}\|_\infty = 1}} \max_{i=1, \dots, n} |(A\mathbf{x})_i|$$

$$= \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{x}\|_\infty = 1}} \max_{i=1, \dots, n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|$$

$$= \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$x_j = \text{sign}(a_{ij})$$

