

Computerorientierte Mathematik I

Rationale Zahlen, Fest-/Gleitkommazahlen

Wiederholung: Ganze Zahlen

Problem:

Ist $n > m$, so hat $x + n = m$ keine Lösung $x \in \mathbb{N}$.

Ausweg:

Erweitere $\mathbb{N}$ um $x = (m, n)$, wir schreiben $m - n$.

Neues Problem:

$x + 2 = 1$ und $x + 1 = 0$ hätten verschiedene Lösungen.

Neuer Ausweg:

Äquivalenzklassen! (Siehe Analysis I, Lineare Algebra I)

$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

Wiederholung: Ganze Zahlen

Satz. Jede Zifferndarstellung von $\mathbb{N}$ induziert eine Zifferndarstellung von $\mathbb{Z}$.

$$z_k \cdots z_0{}_q = \sum_{i=0}^k z_i q^i, \quad z_i \in \mathcal{Z} = \{0, \dots, q-1\}$$

$$-z_k \cdots z_0{}_q = - \sum_{i=0}^k z_i q^i, \quad z_i \in \mathcal{Z} = \{0, \dots, q-1\}$$

Vorzeichenbit

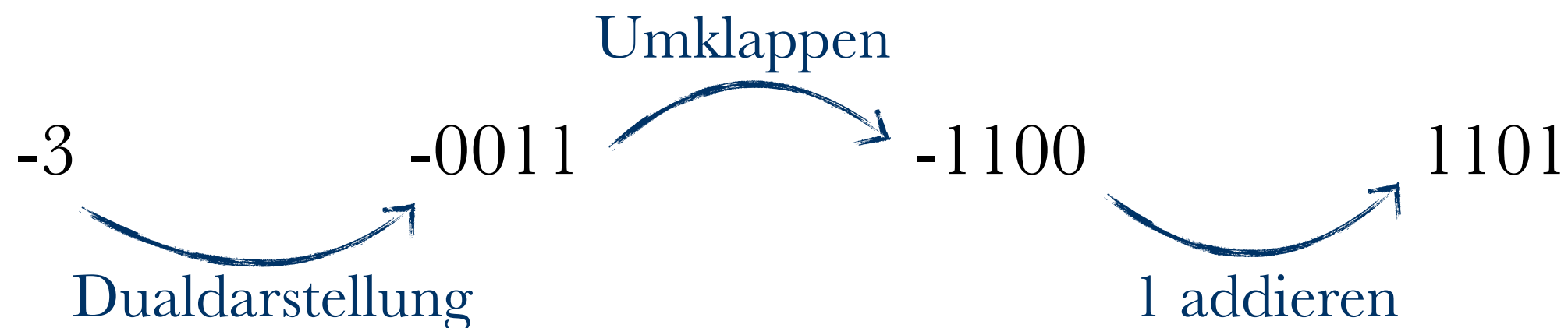


Wiederholung: Zweierkomplement

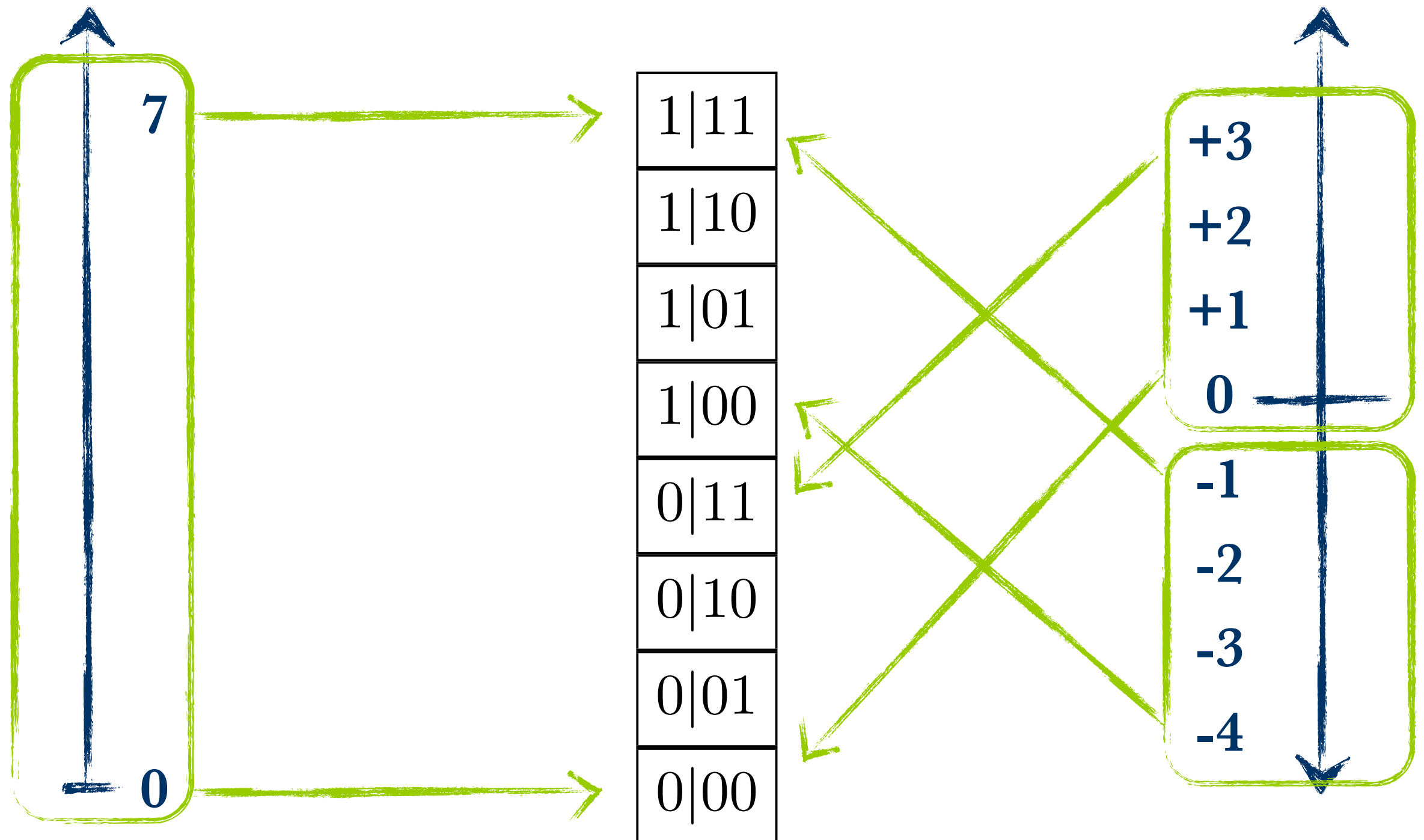
Kochrezept: Das Zweierkomplement von $n < 0$ erhält man durch

Dualdarstellung, Umklappen, 1 addieren

Beispiel: Zahlenbreite $N=4$, $n = -3$



Wiederholung: Zweierkomplement



Rationale Zahlen (anschaulich: Tortenstücke)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Rechenregeln:

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{a \cdot b' + a' \cdot b}{b \cdot b'}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{a \cdot a'}{b \cdot b'}$$

Rationale Zahlen (konstruktiv)

Problem:

$x \cdot b = a$ hat i.a. keine Lösung $x \in \mathbb{Z}$.

Ausweg:

Erweitere $\mathbb{Z}$ um $x = (a, b)$, wir schreiben $\frac{a}{b}$.

Achtung:

Falls $b = 0$ zulässig, dann folgt $\frac{a'}{b'} = \frac{0 \cdot a'}{0 \cdot b'} = \frac{0}{0}$

Konstruktion von $\mathbb{Q}$:

Abschluss von $\mathbb{Z}$ unter Division!

Äquivalenzklassen von Paaren (a, b) , $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$

Darstellung rationaler Zahlen

Satz. *Jede Zifferndarstellung von $\mathbb{N}$ induziert eine Zifferndarstellung von $\mathbb{Q}$.*

Ziffernmengen: $\mathbb{Z} \cup \{-\} \cup \{/\}$.

Folgerung. *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar!*

q-adische Brüche

Definition. *Die Darstellung*

$$z_n \cdots z_0, z_{-1} \cdots z_{-m} q = \sum_{i=-m}^n z_i q^i,$$

mit $n, m, q \in \mathbb{N}$, $q > 1$ und $z_i \in \{0, \dots, q - 1\}$,
heißt q-adischer Bruch.

Komma!

Dezimalbrüche

$$z_n \cdots z_0, z_{-1} \cdots z_{-m} = \sum_{i=-m}^n z_i 10^i, \quad z_i \in \{0, \dots, 9\}$$

- Addition & Multiplikation wie bei Dezimalzahlen!
- Komma beachten!

$$\sum_{i=1}^m z_{-i} 10^{-i} = \frac{\sum_{i=1}^m z_{-i} 10^{m-i}}{10^m}$$

Dezimalbrüche

Beispiel. *Der Bruch $\frac{1}{3}$ hat die Darstellung*

$$\frac{1}{3} = 0,33333333 \dots$$

Form gleicht q -adischer Darstellung, benötigt aber $m = \infty$ Nachkommastellen.

Satz. *Jeder q -adische Bruch ist eine rationale Zahl, nicht umgekehrt.*

Periodische Dezimalbrüche

Satz. Für $q > 1$ hat die geometrische Reihe den Grenzwert

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^{-i} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m q^{-i} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{-m-1}}{1 - q^{-1}} = \frac{1}{1 - q^{-1}}.$$

Beispiel. Betrachte $0,123123\dots$ (Periodenlänge 3):

$$\begin{aligned} 0,123123\dots &= 0,123 \cdot (10^0 + 10^{-3} + 10^{-6} + \dots) \\ &= 0,123 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} 10^{-3i} \\ &= 0,123 \cdot \frac{1}{1 - 10^{-3}} = \frac{123}{999}. \end{aligned}$$

Periodische Dezimalbrüche

$$0,123123\ldots =: 0,\overline{123}$$

Wir verbieten $\overline{0}$, denn

$$0,\overline{9} = 0,9 \sum_{i=0}^{\infty} 10^{-i} = 0,9 \frac{1}{1-10^{-1}} = \frac{0,9}{0,9} = 1,\overline{0}$$

Satz. *Jede rationale Zahl ist ein periodischer Dezimalbruch und umgekehrt.*

Dualbrüche

$$z_n \cdots z_0, z_{-1} \cdots z_{-m} {}_2 = \sum_{i=-m}^n z_i 2^i, \quad z_i \in \{0, 1\}$$

Beispiel. *Dezimalbruch $\rightarrow$ Dualbruch*

$$\begin{aligned} 1,375 &= 1 \cdot 2^0 + 0,375 \\ &= 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 0,375 \\ &= 2^0 + 1 \cdot 2^{-2} + 0,125 \\ &= 2^0 + 2^{-2} + 2^{-3} \\ &= 1,011_2 \end{aligned}$$

Dualbrüche

Beispiel. *Dezimalbruch $\rightarrow$ Dualbruch*

$$0,1_{10} = 0,0\overline{0011}_2$$

Satz. *Jeder Dualbruch ist ein Dezimalbruch, nicht umgekehrt!*

Proof. $\rightarrow$ Übung!



Praktische Realisierung

Darstellung als Paar von **integer**-Zahlen:

- Länge muss variabel sein!
- Aufwand an Rechenoperationen (Kürzen) a priori nicht bekannt!

Keine standardisierte Hardwareunterstützung!

- Spezialanwendungen (Computergraphik)
- Symbolisches Rechnen (Maple, Mathematica, ...)

Abzählbarkeit und Zifferndarstellung

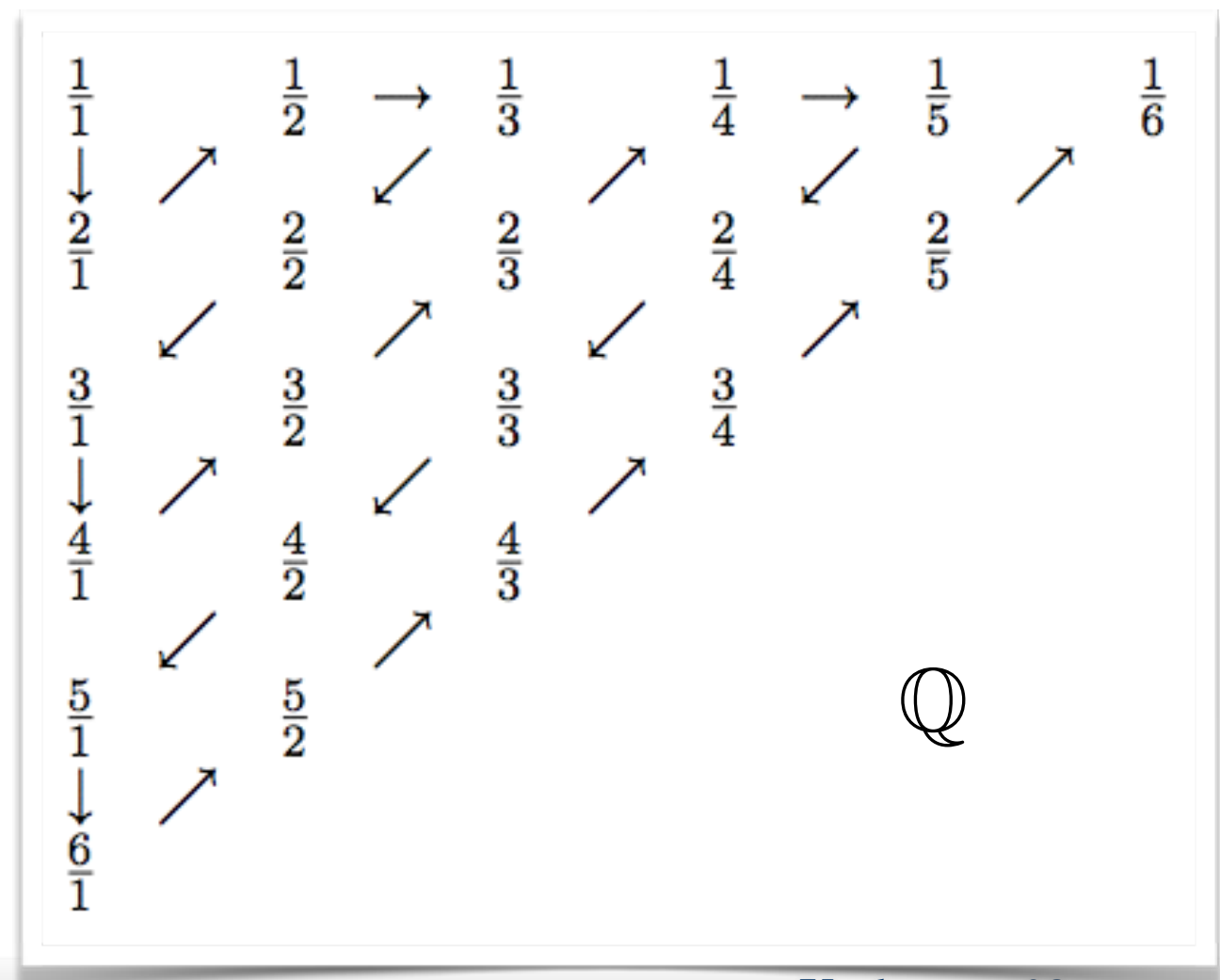
Definition. Eine Menge M mit unendlich vielen Elementen heißt abzählbar (unendlich), wenn eine bijektive Abbildung

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow M$$

existiert.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$



Reelle Zahlen

Darstellung: unendliche Dezimalbrüche

$$\mathbb{R} = \{z_n \cdots z_0, z_{-1} z_{-2} \cdots \mid z_i = 0, \dots, 9\}$$

Satz. $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar!

Folgerung. Es gibt keine Zifferndarstellung von $\mathbb{R}$!

Folgerung. Numerisches Rechnen mit reellen Zahlen ist nicht möglich!

Absoluter Fehler

Definition. *Es sei $\tilde{x}$ eine Approximation von $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt der Abstand*

$$|x - \tilde{x}|$$

absoluter Fehler.

Beispiel. *$\tilde{x} = 3$ approximiert die Zahl $x = \pi$ bis auf den absoluten Fehler*

$$|\pi - 3| < 2 \cdot 10^{-1}.$$

Relativer Fehler

Definition. *Es sei $\tilde{x}$ eine Approximation von $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Dann heißt das Verhältnis*

$$\frac{|x - \tilde{x}|}{|x|}$$

relativer Fehler.

Beispiel.

$$\frac{|4 - 0|}{|4|} = 10^0 \quad \text{aber} \quad \frac{|1000 - 996|}{|1000|} = 4 \cdot 10^{-3}$$

Festkommazahlen (q-adische Brüche)

Definition. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Dann ist

$$z_{n-1} \cdots z_0, z_{-1} \cdots z_{-m} {}_q = \sum_{i=-m}^{n-1} z_i q^i,$$

mit $z_i \in \{0, \dots, q-1\}$, eine Festkommazahl mit $\ell = n + m$ Stellen.

Festkommazahlen

Beispiel. Betrachte eine Festkommadarstellung mit $n = 3$ Vorkommastellen und $m = 1$ Nachkommastellen.

$x = 0,123$ lässt sich nicht exakt darstellen! Wir runden $\tilde{x} = 0,1$.

$$\text{relativer Fehler: } \frac{|0,123 - 0,1|}{|0,123|} \approx 0,2$$

$x = 123,0$ lässt sich exakt darstellen! $\tilde{x} = 123,0$.

$$\text{relativer Fehler: } \frac{|123,0 - 123,0|}{|123,0|} = 0$$

Nicht optimal!

Gleitkommazahlen

Definition. Jede in der Form

$$\tilde{x} = (-1)^s \cdot a \cdot q^e$$

mit Vorzeichenbit $s \in \{0, 1\}$, Exponent $e \in \mathbb{Z}$ und Mantisse $a = 0$ oder

$$a = 0, a_1 \cdots a_\ell = \sum_{i=1}^{\ell} a_i q^{-i}, \quad a_i \in \{0, \dots, q-1\}, a_1 \neq 0$$

darstellbare Zahl $\tilde{x}$ heißt Gleitkommazahl mit Mantissenlänge $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 1$. Die Darstellung heißt normalisierte Gleitkommadarstellung. Die Menge aller dieser Zahlen heißt $\mathbb{G}(q, \ell)$.

Gleitkommadarstellungen

Beispiel. Sei $q = 10$ und $\ell = 4$.

x	$\tilde{x}$	$\frac{ x - \tilde{x} }{ x }$
0, 123	$0, 1230 \cdot 10^0$	0
123	$0, 1230 \cdot 10^3$	0
123, 456	$0, 1235 \cdot 10^3$	$\approx 0, 00036$
0, 00123456	$0, 1235 \cdot 10^{-2}$	$\approx 0, 00036$