

Computerorientierte Mathematik I

Natürliche und ganze Zahlen

Wiederholung: Natürliche Zahlen

Definition. *Ausgezeichnetes Element $0 \in \mathbb{N}$.*

Abbildung $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, mit

(S1) S ist injektiv, d.h. $S(n) \neq S(m)$ falls $n \neq m$.

(S2) $0 \notin S(\mathbb{N}) = \{S(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(S3) Ist $M \subset \mathbb{N}$ und gilt $0 \in M$, $S(M) \subset M$ so gilt $M = \mathbb{N}$.

0, 1, 2, 3, ...

Wiederholung: q-adische Darstellung

Definition. Sei $\mathcal{Z}$ eine Ziffernmenge mit q Elementen. Wir definieren eine bijektive Abbildung

$$\varphi : \{0, \dots, q-1\} \rightarrow \mathcal{Z}$$

durch $i \mapsto \varphi(i) = z_i$.

Dann erweitern wir $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{Z})$ durch

$$n \mapsto \varphi(n) = z_{r_k} z_{r_{k-1}} \dots z_{r_0},$$

$$\text{mit } n = \sum_{i=0}^k r_i q^i \text{ und } r_i \in \{0, \dots, q-1\}.$$

Konventionen

$$z_k z_{k-1} \cdots z_1 z_0 q = \sum_{i=0}^k z_i q^i$$

- keine Unterscheidung zwischen Darstellung und Zahl
- kein Index bei $q = 10$

Dualsystem (Positionssystem zur Basis $q = 2$)

$$\mathcal{Z} = \{0, 1\} \quad z_k z_{k-1} \cdots z_1 z_0 {}_2 = \sum_{i=0}^k z_i 2^i$$

$$\begin{aligned} 1011_2 &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 8 + 0 + 2 + 1 \\ &= 11 \end{aligned}$$

$$1001_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 9$$

$$101_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5$$

$$11_2 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 3$$

Addition im Dualsystem

$$1 + 1 = 10_2$$

$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 + \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

$$11 + 5 = 16$$

Multiplikation im Dualsystem

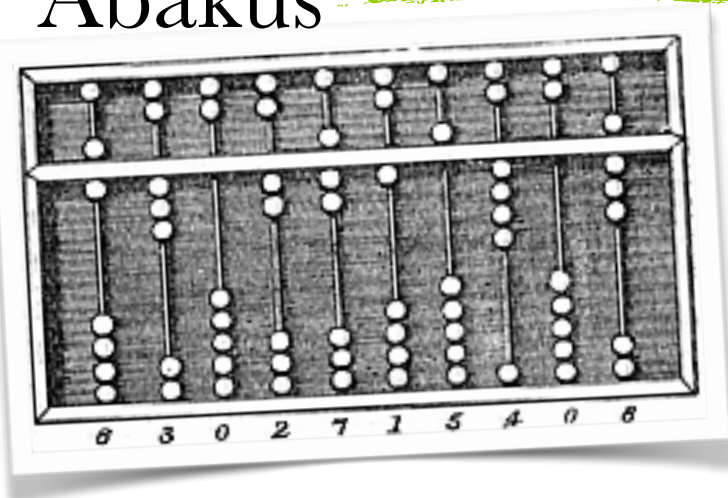
$$1 \cdot 1 = 1$$

$$\begin{array}{rcccccc}
 1 & 0 & 0 & 1 & \cdot & 1 & 1 \\
 \hline
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
 & & & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
 \end{array}$$

$$9 \cdot 3 = 27$$

Historische Rechenmaschinen

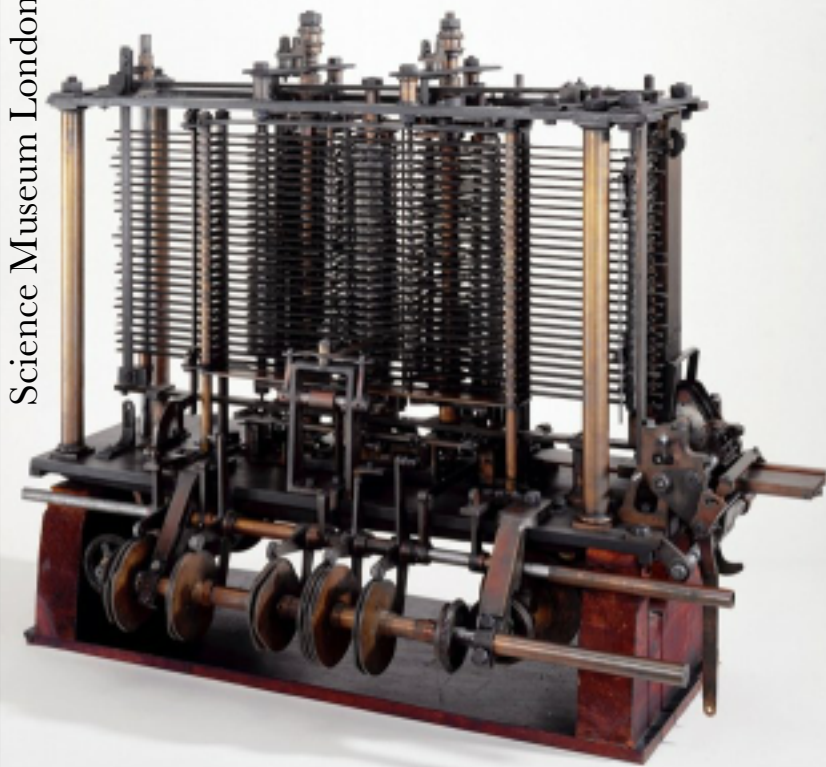
Abakus



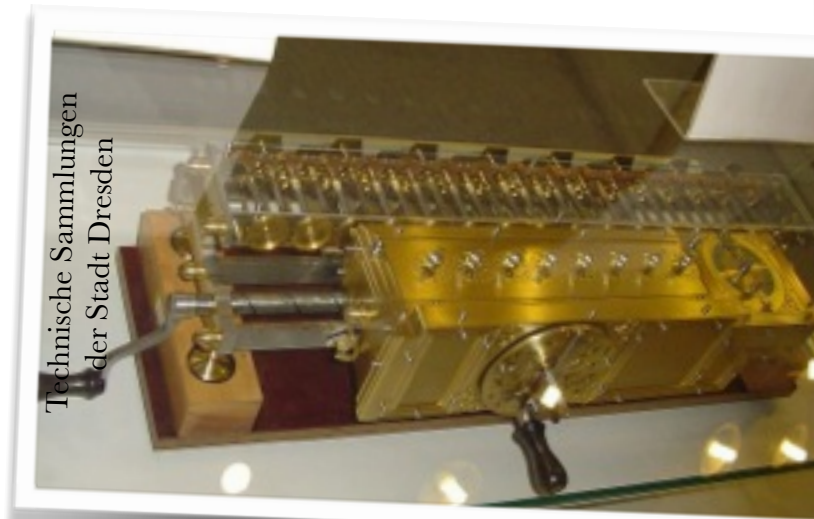
Mechanische
Zählräder

Analytical Engine

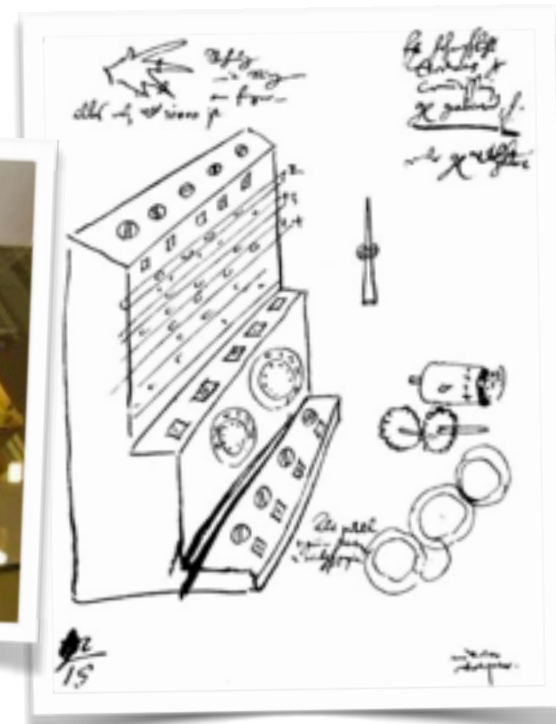
Science Museum London



Technische Sammlungen
der Stadt Dresden



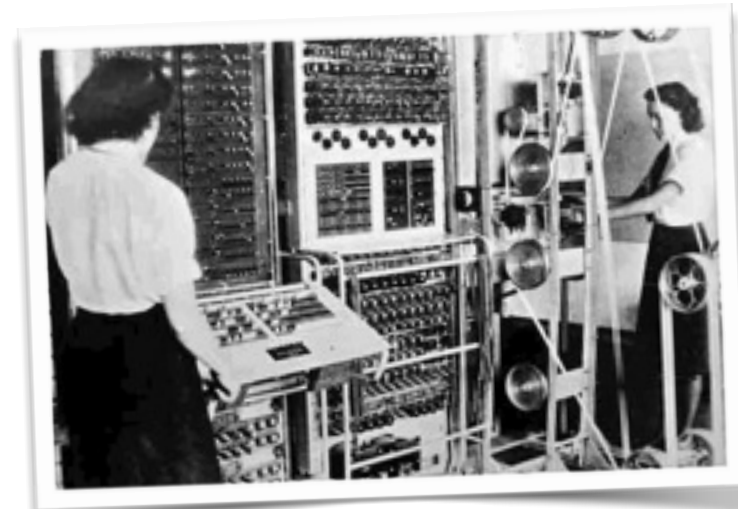
Rechenmaschinen mit
dekadischem System



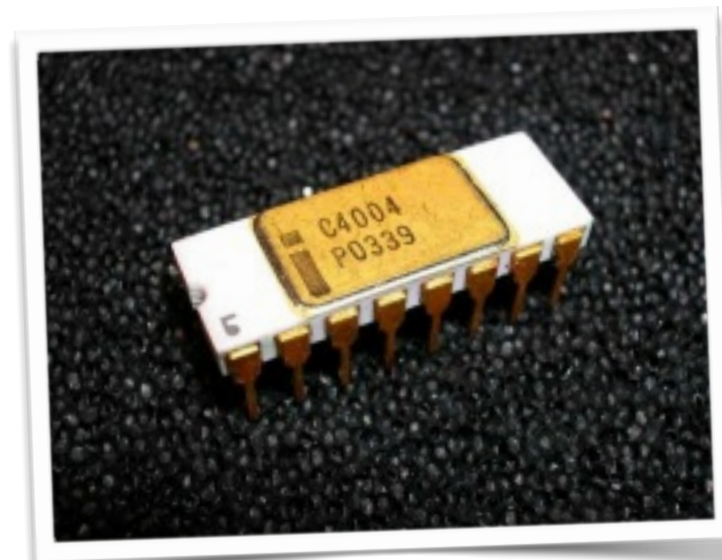
Elektrisch betriebene Rechenmaschinen



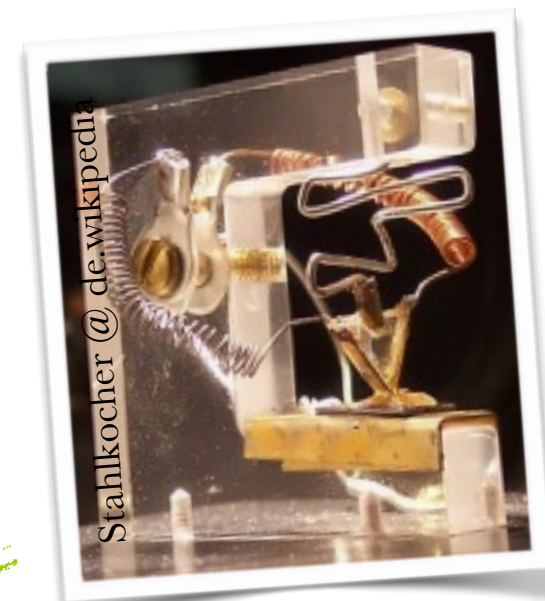
Z3 (Relais)



Colossus (Elektronenröhren)



Mikroprozessor



Transistor

Moderne Rechenmaschinen



Apple II
(1977)



Blue Gene (2007)

Technische Realisierung

- kleinste Einheit (0 oder 1): Bit
- Bits werden in festen Längen zusammengefasst:
 $8 \text{ Bits} = 1 \text{ Byte}$, $2^8 = 256 \text{ Zustände}$
- Zahldarstellung nutzt feste Anzahl von Bytes:
üblich sind 1, 2, 4, 8 Byte bzw. 8, 16, 32, 64 Bits

$101_2 \rightarrow \boxed{0101}$

Technische Realisierung

Satz. *Im Dualsystem lassen sich mit N Ziffern alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$0 \leq n \leq 2^N - 1$$

darstellen.

Technische Realisierung

Beispiel. *Bereich der 8-Bit-Zahlen:*

$$0 \leq n \leq 2^8 - 1 = 255$$

Beispiel. *Bereich der 16-Bit-Zahlen:*

$$0 \leq n \leq 2^{16} - 1 = 65535$$

Technische Realisierung

Beispiel. *Bereich der 32-Bit-Zahlen:*

$$0 \leq n \leq 2^{32} - 1 = 4\,294\,967\,295$$

Beispiel. *Bereich der 64-Bit-Zahlen:*

$$0 \leq n \leq 2^{64} - 1 > 18 \cdot 10^{18}$$

Ganze Zahlen (anschaulich)

$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

- kennt (fast) jedes Kind
- beginnen nirgends
- negative Zahlen (Schulden)
- keine Tortenstücke (Brüche)

Ganze Zahlen (konstruktiv)

Problem:

Ist $n > m$, so hat $x + n = m$ keine Lösung $x \in \mathbb{N}$.

Ausweg:

Erweitere $\mathbb{N}$ um $x = (m, n)$, wir schreiben $m - n$.

Neues Problem:

$x + 2 = 1$ und $x + 1 = 0$ hätten verschiedene Lösungen.

Neuer Ausweg:

Äquivalenzklassen! (Siehe Analysis I, Lineare Algebra I)

Ganze Zahlen: Zifferndarstellung

Satz. Jede Zifferndarstellung von $\mathbb{N}$ induziert eine Zifferndarstellung von $\mathbb{Z}$.

$$z_k \cdots z_0{}_q = \sum_{i=0}^k z_i q^i, \quad z_i \in \mathcal{Z} = \{0, \dots, q-1\}$$

$$-z_k \cdots z_0{}_q = - \sum_{i=0}^k z_i q^i, \quad z_i \in \mathcal{Z} = \{0, \dots, q-1\}$$

Vorzeichenbit



Dualdarstellung ganzer Zahlen mit Vorzeichenbit

Erste Ziffer: Vorzeichen ($0, 1 = +, -$)

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, 111_2, 110_2, 11_2, 00_2, 01_2, 010_2, 011_2, \dots \}$$

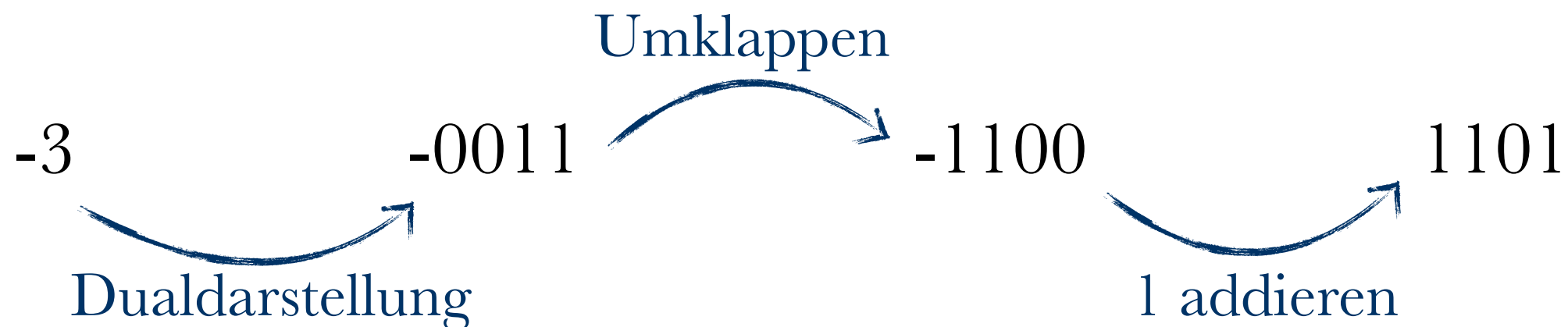
- Keine eindeutige Darstellung der Null: $0 = 00_2 = 10_2$
- Addition natürlicher und ganzer Zahlen grundsätzlich verschieden!

Dualdarstellung ganzer Zahlen mit Zweierkomplement

Kochrezept: Das Zweierkomplement von $n < 0$ erhält man durch

Dualdarstellung, Umklappen, 1 addieren

Beispiel: Zahlenbreite $N=4$, $n = -3$



Rechnen mit dem Zweierkomplement

Grundsätzlich keine Subtraktion nötig: $a - b = a + (-b)$

Addition direkt auf negative Zahlen im Zweierkomplement anwendbar!

Beispiel. $3 - 3 = 3 + (-3)$ *im 4-Bit-Zweierkomplement lautet*

$$\begin{array}{r}
 0|011 \\
 + \quad 1|101 \\
 \hline
 0|000
 \end{array}$$

Rechnen mit dem Zweierkomplement

Komplementäre
Potenzzerlegung

$$\boxed{1 | z_{N-2} \cdots z_0} \hat{=} - \left(1 + \sum_{i=0}^{N-2} (1 - z_i) 2^i \right)$$

- Eindeutige Darstellung der Null: $0 = 0000_2$
- asymmetrischer Zahlenbereich:

$$z_{\min} = -2^{N-1} \leq z \leq 2^{N-1} - 1 = z_{\max}$$

Rechnen mit dem Zweierkomplement

Beispiel. $N = 3$

-1	1 11
-2	1 10
-3	1 01
-4	1 00
3	0 11
2	0 10
1	0 01
0	0 00

Overflow und Underflow

8-Bit-Zweierkomplement: $-128, \dots, 127$

Berechne $127 + 1$:

$$\begin{array}{r}
 \boxed{0|1111111} \\
 + \boxed{0|0000001} \\
 \hline
 \boxed{1|0000000}
 \end{array}$$

$$127 + 1 \neq 128$$

sondern

$$127 + 1 = -128$$

Ganzzahlige Datentypen

Datentyp	Speicherlänge	$z_{\min}$	$z_{\max}$
<i>C/C++ (angegeben ist jeweils die übliche Länge für Intel-32-Bit-Architekturen)</i>			
char	1	-128	127
unsigned char	1	0	255
short int	2	-32.768	32.767
unsigned short	2	0	65535
int	4	-2.147.483.648	2.147.483.647
unsigned int	4	0	4.294.967.295
long	4	-2.147.483.648	2.147.483.647
unsigned long	4	0	4.294.967.295
<i>Java</i>			
byte	1 Byte	-128	127
short	2 Byte	-32768	32767
char	2 Byte	0	65535
int	4 Byte	-2147483648	2147483647
long	8 Byte	-9223372036854775808	9223372036854775807
char	2 Byte	0	65535

Nächste Woche

Abgabe des 1. Übungszettels

`www.mi.fu-berlin.de/w/CompMolBio/ComaI`

- Darstellung rationaler Zahlen
- Fest-/Gleitkommadarstellung
- Rundungsfehler