Zuse Institut Berlin (ZIB)
Freie Universität Berlin
Dr. H. Siebert, Dr. S. Röblitz, L. David

9. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Analysis
Sommersemester 2011

Abgabe: 17.06.2011, 12:00 Uhr (Tutorenfach B9, Arnimallee 3)

Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **aller** *Gruppenmitgleider sowie der Tutoriumstermin stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Aufgabe 1 (2 Punkte, *Lyapunovfunktion*)
Untersuchen Sie den Gleichgewichtspunkt $u_0 = 0$ der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_1 y_2^3 \\ y_2' &= -y_1^2 y_2^2 - y_2^3 \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Lyapunovfunktion E. *(Hinweis: Machen Sie den Ansatz $E(y) = ay_1^2 + by_2^2$.)*

Aufgabe 2 (2 Punkte, *1. Integral*)
Sei $P : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar (ein Potential). Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$x'' = -\nabla P(x).$$

Formulieren Sie diese Gleichung als System 1. Ordnung in den Variablen x und $v = x'$ und zeigen Sie, dass

$$E(x, v) := \frac{1}{2} v^T v + P(x)$$

ein erstes Integral dieser Gleichung ist. Wie lautet die physikalische Interpretation?

Aufgabe 3 (4 Punkte, *Qualitative Analyse*)
Untersuchen Sie das folgende System nach qualitativen Eigenschaften:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 + \frac{1}{6} y_1^3 - y_2 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die stationären Punkte des Systems und untersuchen Sie diese auf Stabilität.

(b) Tragen Sie in einer Skizze die jeweiligen lokalen Phasenportraits des linearisierten Systems ein. Im Fall zweier reller Eigenwerte nutzen Sie dazu die zugehörigen Eigenvektoren.

Aufgabe 4 (4 Punkte, *Komplexe Zahlen*)

(a) Was stimmt an folgender Gleichung nicht?

$$-4 = 4 \cdot -1 = \sqrt{2} \cdot i \cdot \sqrt{8} \cdot i = \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-8} = \sqrt{(-2)(-8)} = \sqrt{16} = 4$$

(b) Stellen Sie die komplexen Zahlen

$$i^n, \quad (1+i)^4 \quad \text{und} \quad \frac{2-i}{2-3i}$$

in der Form $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, und in Polarkoordinaten dar.

Aufgabe 5 (4 Punkte, *Komplexe Differenzierbarkeit*)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z \cdot \overline{z}$. In welchen Punkten ist f komplex differenzierbar, in welchen holomorph?