Zuse Institut Berlin (ZIB)
Freie Universität Berlin
Dr. H. Siebert, Dr. S. Röblitz, L. David

7. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Analysis
Sommersemester 2011

Abgabe: 03.06.2011, 12:00 Uhr (Tutorenfach B9, Arnimallee 3)

Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **aller** *Gruppenmitgleider sowie der Tutoriumstermin stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen jeweils ein Fundamentalsystem bilden. Begründen Sie.

(a)

$$y^1(t) = \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \end{pmatrix}, \quad y^2(t) = \begin{pmatrix} e^t - e^{-t} \\ e^t + e^{-t} \end{pmatrix}$$

(b)

$$y^1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y^2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 15y'' - 22y' + 10y = 0$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden Differentialgleichungssystems:

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} y$$

Aufgabe 4 (6 Punkte, *Reduktionsverfahren von d'Alembert*)
Gegeben sei ein zweidimensionales Differentialgleichungssystem $y' = A(t)y$ mit einer von der Nullfunktion verschiedenen Lösung $y : I \to \mathbb{R}^2$. Wir nehmen an, dass die 1. Komponente y_1 von y zu keinem Zeitpunkt $t \in I$ den Wert 0 annimmt. Um eine zweite, von y linear unabhängige Lösung z zu finden, wird der Ansatz

$$z(t) = \phi(t)y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ w_2(t) \end{pmatrix}$$

verfolgt, wobei ϕ und w_2 zwei reellwertige Funktionen sind.

a) Setzen Sie z in das System ein und finden Sie Bedingungen an ϕ und w_2, damit z eine Lösung ist. Auf diese Weise erhält man

$$\begin{aligned} w_2(t) &= c_1 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a_{22}(s) - a_{12}(s)\frac{y_2(s)}{y_1(s)}ds\right), \\ \phi(t) &= \int_{t_0}^{t} \frac{a_{12}(s)w_2(s)}{y_1(s)}ds + c_2. \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass y und z (für $c_1 \neq 0$) wirklich linear unabhängig sind.

c) Verwenden Sie das Reduktionsverfahren, um das folgenden Differentialgleichungssystem auf dem Intervall $I = (-1, 1]$ zu lösen.

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{2t}{1-t^2}y_1 - \frac{2}{1-t^2}y_2 \\ y_2' &= y_1 \end{aligned}$$

Anleitung: Zeigen Sie, dass $y(t) = (1, t)^T$ eine Lösung des Systems ist, und bestimmen Sie eine zweite Lösung z. Geben Sie ein Fundamentalsystem an und lösen Sie das Anfangswertproblem für $y(0) = (1, 2)^T$.
Hinweis (nützliche Stammfunktionen):

$$\int \frac{s}{1-s^2}ds = -\frac{1}{2}\ln|1-s^2|$$

$$\int \frac{1}{(1-s^2)^2}ds = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-s}{1+s}\right| + \frac{s}{2(1-s^2)}$$