Zuse Institut Berlin (ZIB)
Freie Universität Berlin
Dr. H. Siebert, Dr. S. Röblitz, L. David

4. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Analysis Sommersemester 2011

Abgabe: 13.05.2011, 12:00 Uhr (Tutorenfach B9 (Laszlo David), Arnimallee 3)

Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **aller** *Gruppenmitglieder sowie der Tutoriumstermin stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein T_2-Raum. Weiter seien $f, g : X \to Y$ stetige Funktionen und $M \subseteq X$ dicht in X, d.h. $\overline{M} = X$. Zeigen Sie, dass $f = g$ ist, falls $f(x) = g(x)$ für alle $x \in M$ gilt.

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Sorgenfrey-Gerade (vgl. Blatt 1) ein T_1- und ein T_4-Raum ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann ein T_4-Raum ist, wenn für alle abgeschlossenen Mengen $A \subseteq X$ und alle offenen Mengen $Q \subseteq X$ mit $A \subseteq Q$ eine offene Menge $U \subseteq X$ so existiert, dass $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq Q$ gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, und betrachten Sie $[a, b]$ als Unterraum von $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie. Zeigen Sie, ohne Verwendung des Satzes von Heine-Borel, dass $[a, b]$ kompakt ist, also dass jede offene Überdeckung von $[a, b]$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Beweisen Sie den Satz von Heine-Borel: Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (mit der natürlichen Topologie) ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.