Zuse Institut Berlin (ZIB)
Freie Universität Berlin
Dr. H. Siebert, Dr. S. Röblitz, L. David

2. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Analysis Sommersemester 2011

Abgabe: 29.04.2011, 12:00 Uhr (Tutorenfach B9, Arnimallee 3)

Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **aller** *Gruppenmitglieder sowie der Tutoriumstermin stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Zeigen Sie durch Angabe von drei Gegenbeispielen, dass keine zwei der Abbildungseigenschaften „stetig“, „offen“ und „abgeschlossen“ die jeweils dritte implizieren.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und M ein Unterraum von X.

(a) Zeigen Sie, dass $f|_M$ stetig ist, falls f stetig ist.

(b) Seien $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossene Teilmengen von X mit $\bigcup_{i=1}^n A_i = X$. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn $f|_{A_i}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ stetig ist.

Bem.: (b) gilt auch für beliebig viele offene statt endlich viele abgeschlossene Mengen.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Für $i \in \mathbb{N}_0$ seien metrische Räume (X_i, d_i) gegeben. Auf $\prod_{i=0}^\infty X_i$ definiere eine Abbildung

$$d : \prod_{i \in \mathbb{N}_0} X_i \times \prod_{i \in \mathbb{N}_0} X_i \to \mathbb{R}, \quad ((x_i)_{i \in \mathbb{N}_0}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}_0}) \mapsto \sum_{i=0}^\infty \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^{n+1}(1 + d_i(x_i, y_i))}.$$

(a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\prod_{i \in \mathbb{N}_0} X_i$ definiert.

(b) Zeigen Sie, dass die von d induzierte Topologie mit der Produkttopolgie auf $\prod_{i \in \mathbb{N}_0} X_i$ übereinstimmt.

Aufgabe 4 (2 Punkte)
Betrachten Sie den Raum $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie bzgl. $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie. Berechnen Sie das Innere der Mengen

$$M_1 := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) \in]1, 2[\,, f(1) > 7\}, \; M_2 := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} : f(n) < 0\}.$$

Aufgabe 5 (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ nicht homöomorph zu einem Intervall I in $\mathbb{R}$ ist (wobei $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ jeweils mit der natürlichen Topologie versehen sind).