

**Optionales 13. Übungsblatt zur Vorlesung  
Höhere Analysis  
Sommersemester 2011**

---

Abgabe: 15.07.2011, 12:00 Uhr (Tutorenfach B9, Arnimallee 3)

---

*Sie können die Aufgaben auf diesem Blatt nutzen, um Zusatzpunkte für die Übung zu sammeln, falls nötig.*

*Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **aller** Gruppenmitglieder sowie der Tutoriumstermin stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

**Aufgabe 1 (4 Punkte)**

Sei  $\gamma$  eine geschlossene Kurve in  $\mathbb{C}$ . Zeigen Sie, dass für all  $z \in \mathbb{C}$ , die in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{C} \setminus sp(\gamma)$  liegen,  $n(\gamma, z) = 0$  gilt.

**Aufgabe 2 (4 Punkte)**

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $z_0$  eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Sei  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  die Laurentreihenentwicklung von  $f$  um  $z_0$ . Beweisen Sie die Bemerkung aus der Vorlesung, dass  $z_0$  genau dann ein Pol von  $f$  ist, wenn ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  so existiert, dass  $a_{-n_0} \neq 0$  und  $a_{-n} = 0$  für alle  $n > n_0$  gilt.

**Aufgabe 3 (4 Punkte)**

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $S \subseteq G$  diskret,  $f$  holomorph in  $G \setminus S$  und  $\gamma$  eine nullhomotope Kurve in  $G$ . Zeigen Sie, dass  $E := \{z \in S \mid n(\gamma, z) \neq 0\}$  endlich ist.

**Aufgabe 4 (4 Punkte)**

Bestimmen Sie für

$$f : \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{(z^2 + 1)^3}$$

die isolierten Singularitäten und zugehörigen Residuen, und berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx.$$