Zuse Institut Berlin (ZIB)
Freie Universität Berlin
Dr. H. Siebert, Dr. S. Röblitz, L. David

12. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Analysis
Sommersemester 2011

Abgabe: 11.07.2011, 11:30 Uhr (Tutorenfach B9, Arnimallee 3)

Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **aller** *Gruppenmitgleider sowie der Tutoriumstermin stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Berechnen Sie die Integrale

$$\text{(a)} \quad \int_\gamma \frac{1}{(z+1)(z-1)^3}\,dz \qquad \text{und} \qquad \text{(b)} \quad \int_\gamma \frac{1}{(z+1)^3(z-1)}\,dz,$$

wobei γ der positiv orientierte Kreisrand von $B(-1,1)$ sei.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $f : B(0,1) \to B(0,1)$ holomorph. Zeigen Sie, dass für alle $z \in B(0,1)$ gilt:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|} \ .$$

Bemerkung: Diese Aufgabe ist optional und zählt nicht für die Punktewertung (d.h. für dieses Blatt werden nur 12 Punkte gerechnet). Punkte für diese Aufgabe kann man sich jedoch trotzdem anrechnen lassen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorph, so dass $f'(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gilt.
Zeigen Sie, dass f eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Fortsetzung besitzt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und $f : G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.
Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) f lässt sich in den Punkt z_0 holomorph fortsetzen (d.h. es existiert eine holomorphe Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ mit $F|_{G\setminus\{z_0\}} = f$),

b) f lässt sich in den Punkt z_0 stetig fortsetzen,

c) es existiert eine Umgebung U von z_0, so dass $f|_{U\setminus\{z_0\}}$ beschränkt ist,

d) $\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) = 0$.