Zuse Institut Berlin (ZIB)
Freie Universität Berlin
Dr. H. Siebert, Dr. S. Röblitz, L. David

9. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Analysis Sommersemester 2011

Abgabe: 24.06.2011, 12:00 Uhr (Tutorenfach B9, Arnimallee 3)

Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **aller** *Gruppenmitgleider sowie der Tutoriumstermin stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, und $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ eine reell differenzierbare Funktion, so dass $\phi \circ f = 0$ und $D\phi(f(z)) \neq 0$ für alle $z \in G$ gilt.
Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ Gebiete. Sei $f : U \to V$ eine bijektive holomorphe Funktion, so dass f' stetig ist und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ gilt.
Zeigen Sie, dass f^{-1} holomorph ist.
Hinweis: Satz über implizite Funktionen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Der *Hauptwert des Logarithmus* ist definiert als

$$Log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to B := \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < Im(z) \leq \pi\}, \;\; z \mapsto ln|z| + i\, arg(z),$$

wobei ln der reelle natürliche Logarithmus und arg die Argumentfunktion ist.
Zeigen Sie, dass Log die Umkehrfunktion von $\exp|_B$ und holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Gegeben seien $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \exp(it)$ und eine stetige Funktion $f : sp(\gamma) \to \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass die Abschätzung

$$|\int_\gamma f(z)\, dz| \leq 4 \max\{|f(z)| \mid z \in sp(\gamma)\}$$

gilt.
Hinweis: Eulersche Formel.