Zuse Institut Berlin (ZIB)
Freie Universität Berlin
Dr. H. Siebert, Dr. S. Röblitz, L. David

1. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Analysis Sommersemester 2011

Ausgabe: 15.04.2011 Abgabe: 22.04.2011, 12:00 Uhr (Tutorenfach B9, Arnimallee 3)

Bitte beachten Sie:
Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen Namen und Matrikelnummern **aller** *Gruppenmitglieder sowie der Tutoriumstermin stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei X eine Menge. Definiere

$$\mathcal{O}_{cofinit} := \{O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ endlich oder } O \in \{\emptyset, X\}\} \qquad \text{und}$$
$$\mathcal{O}_{coabz} := \{O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ abzählbar oder } O \in \{\emptyset, X\}\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_{cofinit}$ und $\mathcal{O}_{coabz}$ Topologien auf X sind und prüfen Sie, ob $(X, \mathcal{O}_{cofinit})$ die Abzählbarkeitsaxiome erfüllt.
Bemerkung: Man nennt $\mathcal{O}_{cofinit}$ die cofinite und $\mathcal{O}_{coabz}$ die coabzählbare Topologie auf X.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $\mathcal{B} := \{[a, b[\mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ die Menge aller halboffenen Intervalle in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{O} := \{M \subseteq \mathbb{R} \mid M = \bigcup_{i\in I} B_i, B_i \in \mathcal{B}, I \text{ Indexmenge}\}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$ ist, und prüfen Sie die Abzählbarkeitsaxiome.
Bemerkung: Der Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ heißt Sorgenfrey-Gerade.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, und seien $A, B \subseteq X$.

(a) Beweisen Sie, dass $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$, $\operatorname{int}(A \cup B) \supseteq \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$ und geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass hier die andere Inklusion nicht gilt.

(b) Beweisen Sie, dass $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ und geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass hier die andere Inklusion nicht gilt.

Aufgabe 4 (2 Punkte)
Seien $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ genau dann eine Basis von $\mathcal{O}$ ist, wenn $\mathcal{B}(x) := \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ für jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis von x ist.

Aufgabe 5 (2 Punkte)
Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn für eine beliebige Subbasis $\mathcal{S}_Y$ von $\mathcal{O}_Y$ und alle $S \in \mathcal{S}_Y$ die Menge $f^{-1}(S)$ offen in $(X, \mathcal{O}_X)$ ist.