Aufgaben zur Vorlesung

Topologie III

Wiederholung
SS 2011

E. Vogt/M. Ullmann
Abgabe: 15.4.2011

Aufgabe 5
Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Das cup-Produkt induziert eine Abbildung $H^0(X,\mathbb{Z}) \times H^0(X,\mathbb{Z}) \to H^0(X,\mathbb{Z})$ in der 0-ten Kohomologie. Bestimmen Sie diese.

Aufgabe 6
Die *Narrenkappe* N (engl. „dunce hat“) entsteht aus dem geometrischen 2-Simplex durch Verkleben der drei 1-Randsimplizies gemäß der kanonischen Orientierung. Berechnen Sie die Homologie und die Fundamentalgruppe von N.

Aufgabe 7
Sei X ein endlicher CW-Komplex. Sei $f\colon X \to X$ eine stetige Abbildung. Bezeichne die zellulären Kettengruppen von X mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ mit $C_k(X;\mathbb{Q})$, dies sind also endlich-dimensionale $\mathbb{Q}$-Vektorräume. f induziert Abbildungen $C_k(f;\mathbb{Q})\colon C_k(X;\mathbb{Q}) \to C_k(X;\mathbb{Q})$. Definiere

$$\mu(f;\mathbb{Q}) := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \operatorname{Tr} C_k(f;\mathbb{Q})$$

wobei Tr die Spur bezeichne. Sei $\lambda(f;\mathbb{Q})$ die Lefschetz-Zahl von f, die als

$$\lambda(f;\mathbb{Q}) := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \operatorname{Tr} H_k(f;\mathbb{Q})$$

definiert war. Zeigen Sie: $\lambda(f;\mathbb{Q}) = \mu(f;\mathbb{Q})$.

(Zur Vereinfachung können Sie auch annehmen, dass X ein Δ-Komplex ist und f eine Abbildung von Δ-Komplexen. Nehmen Sie dann an, dass $C_k(X;\mathbb{Q})$ die simplizialen Kettengruppen sind und H_k die simpliziale Homologie ist.)