Aufgaben zur Vorlesung

Topologie III

Blatt 12 — E. Vogt/M. Ullmann
SS 2011 — Abgabe: 12.7.2011, 10 Uhr

Auf diesem Blatt gibt es maximal 16 von 12 Punkten, d.h. eine Aufgabe Ihrer Wahl ist eine Bonusaufgabe.

Aufgabe 46 (Assoziativität des Cap-Produktes)
Sei X ein topologischer Raum und A, B, C offene Unterräume von X. Sei $f \in H^i(X,B)$, $g \in H^j(X,C)$, sowie $\xi \in H_n((X,A)\times(X,B)\times(X,C))$. Zeigen Sie die Assoziativitätseigenschaft des Slant-Produktes: $(f \times g)/\xi = f/(g/\xi)$ in $H_{n-i-j}(X,A)$.

Folgern Sie daraus die Assoziativitätseigenschaft des Cap-Produktes: Sei zusätzlich $\zeta \in H_n(X, A\cup B\cup C)$. Zeigen Sie also:

$$(f \cup g)\cap \zeta = f \cap (g \cap \zeta).$$

Aufgabe 47 (Natürlichkeit der Poincare-Dualitätsabbildung)
Sei M eine orientierte n-Mannigfaltigkeit, sei $U \subset M$ offen. Zeigen Sie, dass U ein System von Fundamentalklassen besitzt, die unter der Inklusion $f\colon U \to M$ auf das System von Fundamentalklassen von M abgebildet wird.

Folgern Sie daraus die Natürlichkeit der Poincare-Dualitätsabbildung PD_M, $x \mapsto x \cap [M]$. Zeigen Sie also, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^i_c(M) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\mathrm{PD}_M"] & H^i_c(U) \arrow[d, "\mathrm{PD}_U"] \\ H_{n-i}(M) & H_{n-i}(U) \arrow[l, "f_*"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Aufgabe 48 (Filtrierte Kolimiten in abelschen Gruppen)
Eine kleine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *Präordnung*, wenn es zu je zwei Objekten i, j aus $\mathcal{C}$ höchstens eine Abbildung $i \to j$ gibt. Eine Präordnung heißt *gefiltert*, wenn es zu je zwei Objekten i, j ein Objekt k und Abbildungen $i \to k$, $j \to k$ gibt.

Sei $\mathcal{C}$ eine gefilterte Präordnung und seien $F_i\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$, $i = 1, 2$, Funktoren nach abelsche Gruppen. Es gebe eine natürliche Transformation $f\colon F_1 \to F_2$, so dass jede Abbildung $F_1(j) \to F_2(j)$ injektiv ist.

Zeigen Sie, dass die von f induzierte Abbildung vom Kolimes von F_1 zum Kolimes von F_2 injektiv ist.

Aufgabe 49
Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit ungerader Dimension. Man kann zeigen, dass die Homologie von M endlich erzeugt ist (z.B. Hatcher, Corollary A.9). Zeigen Sie, dass die Euler-Charakteristik von M null ist.