Aufgaben zur Vorlesung

Topologie III

Blatt 11
SS 2011

E. Vogt/M. Ullmann
Abgabe: 5.7.2011, 10 Uhr

Im folgenden seien alle Mannigfaltigkeiten ohne Rand.

Aufgabe 43 (Orientierungsüberlagerung)
Sei M eine zusammenhängende n-Mannigfaltigkeit. Sei $\widetilde{M} := \{\nu_m\}_{m \in M}$, wobei ν_m eine lokale Orientierung von M an $m \in M$ ist. Betrachte die Abbildung $p\colon \widetilde{M} \to M$, $\nu_m \mapsto m$.

Definiere eine Topologie auf $\widetilde{M}$ wie folgt. Sei $B \subset \mathbb{R}^n \subset M$ ein abgeschlossener Ball in M, sei $\nu_B \in H_n(M, M \smallsetminus B; \mathbb{Z})$. Setze U_B als die Menge aller $\nu_m \in \widetilde{M}$ mit $m \in B$ und $\nu_m \in H_n(M, M \smallsetminus m; \mathbb{Z})$ liegt im Bild vom ν_B unter der Einschränkungsabbildung. Definiere nun die Topologie auf $\widetilde{M}$ als die von der Basis U_B erzeugte Topologie.

Zeigen Sie:

(i) $p\colon \widetilde{M} \to M$ ist eine zweiblättrige Überlagerung.

(ii) M ist genau dann orientierbar, wenn $\widetilde{M}$ nicht zusammenhängend ist.

Folgern Sie, dass jede zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit trivialer Fundamentalgruppe orientierbar ist.

Aufgabe 44 (orientierungsumkehrende Abbildung)
Sei M eine kompakte zusammenhängende orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $f\colon M \to M$ heißt *orientierungsumkehrend*, wenn gilt $f_*[M] = -[M]$ in $H_n(M; \mathbb{Z})$.

Sei $k \geq 1$. Zeigen Sie, dass es keine orientierungsumkehrende Abbildung $\mathbb{C}\mathrm{P}^{2k} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{2k}$ gibt.

Aufgabe 45
Sei M eine n-dimensionale zusammenhängende kompakte orientierte Mannigfaltigkeit. (Dann sind die Homologiegruppen von M endlich erzeugt.) In der Vorlesung wird gezeigt, dass es einen Isomorphismus $H^k(M; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M; \mathbb{Z})$ gibt, die sogenannte *Poincaré-Dualität*. Sei n gerade, und sei weiterhin $H_l(M; \mathbb{Z}) = 0$ für $0 < l < n/2$. Zeigen Sie:

(i) $H_l(M; \mathbb{Z}) = 0$ für $n/2 < l < n$.

(ii) $H_{n/2}(M; \mathbb{Z})$ ist torsionsfrei.