Aufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra I

Blatt 4 — H. Reich/F. Levikov
WS 2014/15 — Abgabe: 19.11.2014, 8:15 Uhr

Aufgabe 13
Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

(ii) $M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

(iii) $M_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 7x_2 = x_2 + 7x_3 = 0\}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

(iv) Sind U_1 und U_2 Unterräume von $\mathbb{R}^3$, dann ist

$$\{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

ebenfalls ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 14
Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) $S = \{(1, 0, -1), (1, 2, 1), (0, 3, 0)\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(ii) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $S_\alpha = \{(1, \alpha, 0), (\alpha, 1, 0), (0, \alpha, 1)\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(iii) Sind $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ gegeben mit $v_3 \notin L(\{v_1, v_2\})$, dann ist $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(iv) Ist $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$, dann ist $T = \{v_1+v_2, v_1+v_3, v_2+v_3\}$ ebenfalls eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 15
Sei $U = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n z_i = 0\}$.

(i) Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von $\mathbb{C}^n$ ist.

(ii) Bestimmen Sie eine Basis für U und die Dimension $\dim_{\mathbb{C}} U$.

Aufgabe 16
Es seien K-Verktorräume U, V und W, sowie Abbildungen $f : U \to V$ und $g : V \to W$ gegeben. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Sind f und g linear, so ist auch $g \circ f$ linear.

(ii) Sind f und $g \circ f$ linear, so ist auch g linear.

(Bitte wenden!)

(iii) Ist f linear und bijektiv, dann ist die Umkehrabbildung f^{-1} ebenfalls linear.

(iv) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{GL}(V) = \{f \in \mathrm{Sym}(V) \mid f \text{ ist lineare Abbildung}\}$$

eine Untergruppe von

$$\mathrm{Sym}(V) = \{f : V \to V \mid f \text{ ist bijektive Abbildung}\}$$

ist.