Aufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra I

Blatt 3 — H. Reich/F. Levikov

WS 2014/15 — Abgabe: 12.11.2014, 8:15 Uhr

Aufgabe 9

Definieren Sie auf der Menge $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, x, y\}$ eine Addition und eine Multiplikation so, dass $\mathbb{F}_4$ zu einem Körper wird der $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ als Unterkörper enthält. Stellen Sie hierzu Verknüpfungstabellen auf und *überprüfen Sie*, dass alle Axiome erfüllt sind.
Tipp: Setzen Sie $x \cdot y = 1$.

Aufgabe 10

Berechnen Sie die multiplikativen Inversen der komplexen Zahlen $5 + 2i$ und $1 + 2i$. Skizzieren Sie diese Zahlen und ihre Inversen als Punkte im $\mathbb{R}^2$. Was bedeutet der Übergang zum Inversen anschaulich?

Aufgabe 11

Beweisen oder widerlegen Sie:
Sei K eine Menge zusammen mit einer Addition $K \times K \to K$, $(x, y) \to x + y$, und einer Multiplikation $K \times K \to K$, $(x, y) \to x \cdot y$, die die Körperaxiome erfüllen. Dann gilt:

(i) Es existiert kein $x \in K$ mit $x^2 + 1 = 0$.

(ii) Es existiert ein $x \in K$ mit $x^2 - (1 + 1) = 0$.

(iii) Für alle $x \in K$ mit $x \neq 0$ gilt

$$(-x)^{-1} = -(x^{-1}).$$

Aufgabe 12

Sei $\mathrm{fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ist eine Abbildung }\}$. Zeigen Sie, dass durch $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ eine $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf $\mathrm{fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert wird. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) $U = \{f \in \mathrm{fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(7) = 0\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(ii) $U = \{f \in \mathrm{fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid -x^2 \leq f(x) \leq x^2 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.