Aufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra I

Blatt 2 | H. Reich/F. Levikov
WS 2014/15 | Abgabe: 5.11.2014, 8:15 Uhr

Aufgabe 5
Die Abbildung $m\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sei gegeben durch $m(x, y) = x + y + 1$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}, m)$ eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 6
Sei G eine Gruppe mit neutralem Element 1. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Gibt es ein Element $g \in G$ mit $g^2 = 1$, so ist G abelsch.

(ii) Gilt $g^2 = 1$ für jedes Element $g \in G$, so ist G abelsch.

Aufgabe 7
Für eine Gruppe G betrachte man die Abbildung

$$i\colon G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}.$$

Zeigen Sie:

(i) Die Abbildung i ist bijektiv.

(ii) Ist $A \subset G$ eine Teilmenge mit $i(A) \subset A$, dann folgt bereits $i(A) = A$. Eine solche Teilmenge A heiße symmetrisch.

(iii) Für jede Teilmenge $A \subset G$ sind die Mengen $A \cup i(A)$ und $A \cap i(A)$ symmetrisch.

Aufgabe 8
Führen sie die folgenden Ihnen wohlbekannten Rechenregeln auf die Körperaxiome und Notationskonventionen zurück.

(i) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

(ii) Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$ gilt
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$