Aufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra I

Blatt 1 — H. Reich/F. Levikov

WS 2014/15 — Abgabe: 29.10.2014, 8:15 Uhr

Aufgabe 1
Seien A, B und C Teilmengen der Menge X, D Teilmenge der Menge Y. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Gilt $A \cap B = A \cap C$ und $A \cup B = A \cup C$, dann folgt $B = C$.

(ii) Es gilt $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(iii) Es gilt $\big(A \smallsetminus (B \cup C)\big) \cap C = \emptyset$.

(iv) Es gilt $(X \times Y) \smallsetminus (A \times D) = \big((X \smallsetminus A) \times Y\big) \cup \big(A \times (Y \smallsetminus D)\big)$.

Aufgabe 2
Es sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Weiterhin seien A und B Teilmengen von X und C und D Teilmengen von Y. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) $f(\emptyset) = \emptyset$ und $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(ii) $f(A \smallsetminus B) = f(A) \smallsetminus f(B)$.

(iii) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

(iv) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

(v) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(vi) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

Aufgabe 3
Ein Konferenzhotel für Mathematiker hat $\mathbb{N}$ Betten. Das Hotel ist voll belegt, jedoch lassen sich die Gäste beliebig innerhalb des Hotels umquartieren. Das Hotel sollte nach Möglichkeit stets voll belegt sein, aber natürlich sollen auch neu ankommende Gäste untergebracht werden. Sie sind Hotelmanager. Was machen Sie in den folgenden Situationen?

(i) Ein neuer Gast trifft ein.

(ii) Ein Kleinbus mit n neuen Gästen trifft ein.

(iii) Ein ultramoderner Großraumbus mit $\mathbb{N}$ Gästen trifft ein.

(iv) Zwei solche Großraumbusse treffen ein.

(v) Es treffen n solche Großraumbusse ein.

(vi) Es treffen $\mathbb{N}$ Großraumbusse ein.

Formulieren Sie zunächst die Fragen (i) bis (vi) um in Fragen nach der Existenz von Abbildungen mit gewissen Eigenschaften. Lösen Sie dann die umformulierte Aufgabe.

Aufgabe 4
Seien $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ und $h\colon Y \to X$ Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Sind f und g surjektiv, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(ii) Es ist $g \circ f$ injektiv genau dann, wenn f und g beide injektiv sind.

(iii) Gilt $h \circ f = \mathrm{id}_X$, so ist h surjektiv.

(iv) Ist g eine Bijektion, dann ist $g \circ f$ injektiv genau dann, wenn f injektiv ist.