

Proseminar zur Algebra: Symmetrien

WS 2011/2012

H. Reich/M. Ullmann

Hauptquellen des Seminars sind das Buch „Algebra“ von Michael Artin [Art93] sowie das Buch „Groups, Graphs and Trees“ von John Meier [Mei08]. Für Vortrag 12 ist zusätzlich das Buch „Introduction to Group Theory“ von Oleg Bogopolski [Bog08] nützlich.

Zum Thema: 'Wie halte ich einen Seminarvortrag?' ist der Text <http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lehn/le/seminarvortrag> zu empfehlen.

0. Vorbereitungen. (20.10.2011) (Von uns gehalten.)

1. Isometrien der Ebene. (27.10.2011)

(Artin, Kapitel 4, Paragraph 5)

Orthogonale Matrizen, Drehmatrizen, Klassifikation der Drehungen um den Nullpunkt, Isometrien, Drehungen, Translationen, Beschreibung einer Isometrie von \mathbb{R}^2 als orthogonale Abbildung komponiert mit Translation.

2. Klassifikation der Isometrien der Ebene. (3.11.2011)

(Artin, Kapitel 5, Paragraph 2)

Evtl. Paragraph 1 als Motivation erwähnen. Klassifikation der Bewegungen, orientierungserhaltend, orientierungsumkehrend. Feinere Klassifikation: Translation, Drehung, Spiegelung, Gleitspiegelung.

3. Endliche Gruppen von Bewegungen der Ebene. (10.11.2011)

(Artin, Kapitel 5, Paragraph 3)

Symmetriegruppen, Fixpunkt, jede endliche Untergruppe hat einen Fixpunkt, Klassifikation der endlichen Untergruppen, zyklische Gruppe, Diedergruppe.

4. Diskrete Gruppen von Bewegungen der Ebene I. (17.11.2011)

(Artin, Kapitel 5, Paragraph 4 bis Seite 191, oben.)

diskrete Untergruppen, diskrete Untergruppen der Translationsgruppe, diskrete Untergruppen der Drehgruppe. Beweis von Satz 4.11.

Auch: $O(n)$ kompakt, Bewegungen der Ebene als Topologische Gruppe.

5. Diskrete Gruppen von Bewegungen der Ebene II. (24.11.2011)

(Artin, Kapitel 5, Paragraph 4 Seite 191 bis Ende.)

Beweis von Satz 4.5, Gitter, Gitterbasis, ebene Kristallgruppen.

6. Gruppenoperationen I. (1.12.2011)

(Artin, Kapitel 5, Paragraph 5 - 6 bis Satz 6.4)

Gruppenoperationen, Operation auf Nebenklassen, Bahnen, Stabilisator.

7. Gruppenoperationen II. (8.12.2011)

(Artin, Kapitel 5, Paragraph 6 ab Satz 6.5 bis Paragraph 7)

Stabilisator, Bahnformel Index.

8. Endliche Untergruppen von $SO(3)$. (15.12.2011)

(Artin, Kapitel 5, Paragraph 9)

9. Gruppen und Graphen. (5.1.2012)

(Meier, 1.1 bis 1.3, Ausschnitte)

Cayley's basic theorem (1.5), Zykel-Notation (1.6), Graphen (1.9), Beispiel 1.18, Bäume (Exercise 1.10), Symmetrie eines Graphens (1.14) und Beispiele. Spezielle Untergruppen der Symmetriegruppen eines (markierten/gerichteten) Graphen (1.21-1.23). Beispiele nach Möglichkeit und Belieben.

10. Cayley-Graphen.(12.1.2012) (x)

(Meier, 1.5 + 1.6)

Erzeuger, "Cayley's better theorem"(1.42), Beispiele (1.6) insbesondere evtl. Symmetrien eines Würfels (1.6.3), Cayley-Graphen für \mathbb{Z} und \mathbb{Z}^n (1.6.4).

11. Symmetrien von Cayley-Graphen und Fundamentalbereiche. (19.1.2012)

(Meier, 1.7 + 1.8)

Jede Gruppe ist Symmetriegruppe eines markierten Graphen (1.51), Existenz von Fundamentalbereichen und Anwendungen (1.52, 1.55)

12. Freie Gruppen. (26.1.2012) (x)

(Bogopolski 2.3, Meier 3.1.1 und 3.3)

Definition Freie Gruppe, universelle Eigenschaft, Eindeutigkeit des Ranges einer Freien Gruppe (Bogopolski 2.3.8). Präsentationen (Meier 3.3)

13. Freie Gruppen und Graphen. (2.2.2012)

(Meier, 3.1.2 - 3.1.3)

Caley-Graph von F_2 , F_2 als Untergruppe von $SL_2(\mathbb{Z})$ (3.7), Gruppen von Homöomorphismen (3.9) Ping-Pong-Lemma (3.10)

14. Gruppenwirkungen auf Bäumen. (9.2.2012) (x)

(Meier, 3.4 - 3.5)

Freie Gruppen sind die, die frei auf Bäumen wirken (3.20). Satz von Nielsen-Schreier (3.23) Beispiel $Z_3 * Z_4$ (ohne $*$ zu definieren) (Abschn. 3.5)

15. Freie Produkte von Gruppen. (16.2.2012)

(Meier, 3.6 - 3.7)

Definition freies Produkt von Gruppen (3.6), Kern der Abelschmachung (3.7)

Literatur

[Art93] Michael Artin. *Algebra*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.

[Bog08] Oleg Bogopolski. *Introduction to group theory*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.

[Mei08] John Meier. *Groups, graphs and trees*, volume 73 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.