Günter M. ZIEGLER, Berlin

Geometrie zum Anfassen: Kachelungen und Polyeder

Dieser Text ist eine kurze Skizze meines „mathematischen Hauptvortrags“ auf der Dortmunder GDM-Tagung. Ich soll aus der aktuellen mathematischen Forschung berichten — von der wir alle wissen, dass 98,4% davon unendlich abstrakt ist. Abstrakt heißt in diesem Fall: wir können es uns nicht vorstellen, weil wir die Ochsentour (die „romantische Phase“) des sich Einarbeitens, Ausprobierens, Verstehens, Lernens, Modelle-Bauens usw. für die entsprechenden Konzepte, Strukturen und Objekte noch nicht geleistet haben (und dies auf die Schnelle auch nicht schaffen können oder wollen).

Konkret: Modelle!

Sie wollen hier von mir also was „ganz Konkretes“ sehen — und ich will das gerne bieten, und berichte dabei aus meinem Arbeitsgebiet, der der Diskreten Geometrie, insbesondere der Theorie der Polyeder. Mein Ansatz — und dies soll auch Kontakt herstellen mit dem Rahmenthema der Tagung — ist der Versuch, dabei möglichst *konkret* zu arbeiten und zu bleiben. Insbesondere soll man sehen, dass wir ich/wir mit sehr vielen Bildern, mit vielen Modellen und mit verschiedensten Techniken der mathematischen Visualisierung arbeiten. Geometrie ist der Teil der Mathematik, der sich am ehesten in Bildern, in Modellen, in *geometrischen Modellen* erschließt. Die *Betonung des Konkreten* kann dabei ganz unterschiedlich aussehen, und ich bin da auch ganz un-ideologisch:

- Zeichnen! Der Kollege Siebeneicher aus Bielefeld hat vor einiger Zeit über einen Zeichenkurs für Mathematikstudenten berichtet, den er in Zusammenarbeit mit einem Maler abgehalten hat.
- Laden wir doch öfter mal einen Architekten in den Mathematikunterricht ein! (Siehe Bokowski [3]: darstellende Geometrie für Architekten mit *Cinderella*.) Schauen Sie sich nur die phantastischen, futuristischen Polyeder (!) an, die der jüdisch-polnisch-amerikanische Berliner Architekt Daniel Libeskind jetzt an Stelle des zerstörten World Trade Centers setzen will! Und die Polyeder der Gegenentwürfe!
- Modelle Bauen — damit sind nicht nur, aber auch, die „klassischen“ Modelle aus Papier, Gips und Draht gemeint, die sicher auch auf verschiedenen Fluren dieser Universität verstauben (ganz sicher bin ich auch deshalb, weil der große Geometer Ludwig Danzer hier Professor war), sondern eben auch Geometrie-Modelle im Computer, von denen Sie im Folgenden hier einige sehen werden.

„Mathematik zum Anfassen“ heißt die gefeierte Beutelspacher-Ausstellung in/aus Gießen. „Mathematik zum Anfassen“ ist aber auch eine wunderbare Zielsetzung für den Mathematik-Unterricht, eben mit voller Unterstützung des Zeichnens, Experimentierens, und Modelle-Bauens. Dabei ist für mich die Geometrie ohnehin *der konkreteste Teil der Mathematik*, und ich £nde es unendlich schade, dass wir uns so wenig mit Geometrie beschäftigen. (Hier im Westen wird in den Schulen eben auch wenig Geometrie gelehrt — die osteuropäische Tradition ist da ganz anders!)

Wichtig ist mir dabei am Geometrie-Unterricht gar nicht so sehr der Lehrplan-P¤icht-Stoff. Ebene Dreiecke sind einfach langweilig! Es muss eben wirklich nicht immer die klassische ebene/euklidische/Dreiecks-Geometrie sein! (Und das, obwohl gerade kürzlich zwei Euklid-Bücher erschienen sind, von Benno Artman [2] und von Robin Hartshorne [11], die beide wieder „Lust auf Euklid“ machen.)

Was wir aus der Perspektive der Universitäts-Mathematik anbieten können sind spannende, lebendige Illustrationsthemen, geeignet als Ausgangspunkt für spielerisches, entdeckendes Lernen. Solche Themen £nden sich auch im Anhang (`http://www.math.tu-berlin.de/~ziegler/BMG/`) eines noch nicht veröffentlichten, gemeinsamen Arbeitspapiers von MNU Berlin und der Berliner Mathematischen Gesellschaft (BMG). Hier präsentiere/skizziere ich auch ein solches Thema – als Beispiel.

Kachelungen und Polyeder

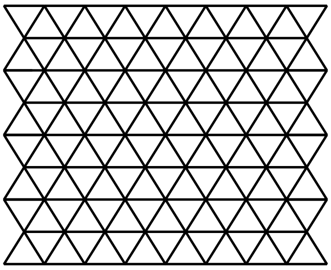
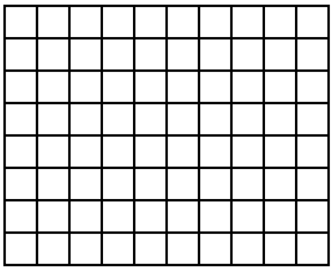
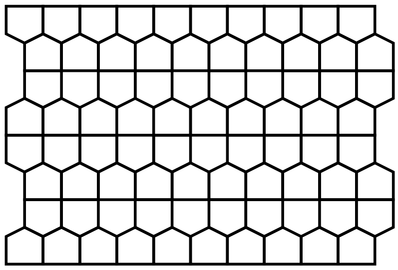
Die „Theorie der P¤asterungen der Ebene und des Raumes“ ist ein weites Feld, mit aktuellster Forschung, mit neuen Möglichkeiten (auch der Computer-Unterstützung und der Visualisierung), und mit vielen schönen Bildern und Beispielen. Das Mathematische Standardwerk dazu ist der dicke Band von Grünbaum und Shephard “Tilings and Patterns” [9]. Er ist durchaus zugänglich, mit vielfältigen, intelligenten, (elementar-)mathematischen Diskussionen, Hunderten von Bildern und Beispielen. Die Bezüge des Themas „P¤asterungen“ in’s „wirkliche Leben“ sind vielfältig:

- Bienenwaben, Seifenblasenschaum (siehe [10], Hemme [12]),
- Kunst (die berühmten Mosaiken der Alhambra, aber auch die Graphiken von Escher in der opulenten Version von [6] — dazu aus mathematischer Sicht auch z. B. ganz aktuell der Band von Emmer und Schattschneider [4])
- Klassi£kation von regulären Parkettierungen
- Kristallographie, Quasikristalle,
- reguläre und nicht-reguläre Polyeder — wie im Folgenden diskutiert.

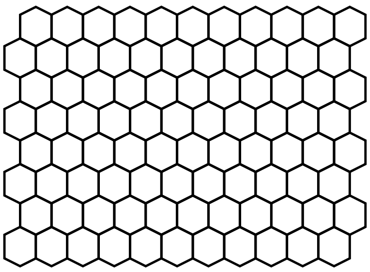
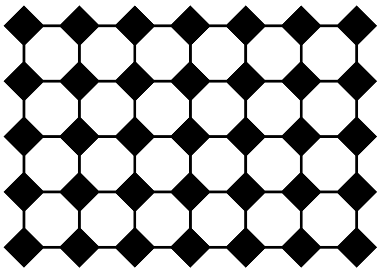
Den Hauptteil meines Vortrages auf der GDM-Tagung, der mit vielen Illustrationen Problemstellungen aus der Welt der Kachelungen (Pflasterungen, Parkettierungen) der Ebene und des Raumes präsentiert hat, kann ich hier nur grob skizzieren.

Kann man den Küchenboden mit achteckigen Kacheln fliesen?

Dies soll für eine Weile die Leitfrage sein. Uns fallen natürlich sofort Beispiele von Pflasterungen mit Dreiecken, Vierecken, und mit Fünfecken ein:

Man kann den Küchenboden auch mit Sechsecken (Bienenwaben!) und „mit“ Achtecken pflastern:

… was uns zu dem Problem führt, unsere Begriffe sauber zu definieren: wir betrachten im Folgenden *Pflasterungen* (synonym: *Kachelungen*) der Ebene mit konvexen Polygonen (die *Kacheln* oder *Fliesen* heißen, und von denen wir fordern, dass sie die Ebene einfach überdecken, und Kante-an-Kante aneinanderstoßen. (Der Umschlag von [9] zeigt etwa eine Pflasterung der Ebene mit nicht-konvexen Neunecken, die wir nicht zulassen. Und „Kachelung mit Achtecken“ soll heißen, dass *alle* Kacheln Achtecke sind.

Ein Ausflug über Polyeder

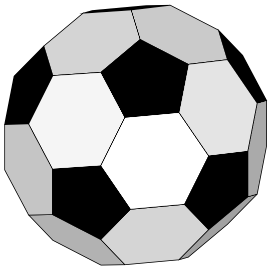
Die Euler’sche Polyederformel besagt, dass
Eckenzahl − Kantenzahl + Flächenzahl $=$ 2, also

$$e-k+f=2$$

für jedes *konvexe* 3-dimensionale Polyeder gilt.

– vgl. die berühmte Diskussion in Lakatos [14]
– historischer Exkurs: Federico [7]
– 17 verschiedene Beweise gibt Eppstein [5]; siehe auch [1, Kap. 10].

Beispiele: die regulären und halbregulären (achimedischen) Polyeder £nden sich beispielsweise in der Modellsammlung "Electronic Geometry Models" [13] im Internet. Dort £ndet sich auch der "Soccerball", von dem Experten behaupten, er sei rund, der aber in Wirklichkeit 60 Ecken hat.



Milliarden von Beispielen (kombinatorisch gegeben) £ndet man in den Datenbanken von Gordon Royle [17].

Doppeltes Abzählen

Die kombinatorische Technik des „doppelten Abzählens" (vgl. [1, Kap. 21]) liefert

$$\text{Summe der Eckengrade} \;=\; 2 \cdot \text{Kantenzahl}$$

also

$$\begin{matrix}\text{mittlerer}\\ \text{Eckengrad}\end{matrix} \;=\; \frac{2 \cdot \text{Kantenzahl}}{\text{Eckenzahl}}$$

und genauso erhält man

$$\begin{matrix}\text{mittlere}\\ \text{Seitenzahl}\end{matrix} \;=\; \frac{2 \cdot \text{Kantenzahl}}{\text{Flächenzahl}}$$

Kombination mit der Euler-Formel und einfache Rechnung ergibt nun für jedes Polyeder

$$\frac{1}{\frac{2k}{e}} + \frac{1}{\frac{2k}{f}} \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{k},$$

also

$$\frac{1}{\begin{matrix}\text{mittlerer}\\ \text{Eckengrad}\end{matrix}} + \frac{1}{\begin{matrix}\text{mittlere}\\ \text{Seitenzahl}\end{matrix}} \;>\; \tfrac{1}{2}$$

also

$$\begin{aligned}\frac{1}{\begin{matrix}\text{mittlere}\\ \text{Seitenzahl}\end{matrix}} &> \tfrac{1}{2} - \frac{1}{\begin{matrix}\text{mittlerer}\\ \text{Eckengrad}\end{matrix}}\\ &\geq \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6}.\end{aligned}$$

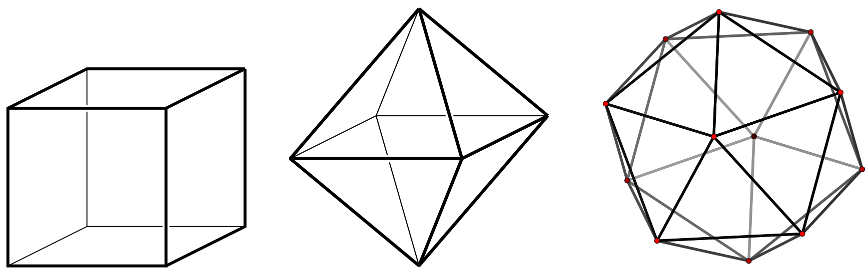
und damit insbesondere das (sehr klassische) Resultat, dass für jedes Polyeder gilt

$$\text{mittlere Seitenzahl} \quad < \quad 6.$$

das ja auch in der Klassi£kation der regulären Polyeder an entscheidender Stelle eingesetzt wird.

Also: es gibt kein konvexes Polyeder, dessen Flächen alle (oder auch nur im Durchschnitt) sechs oder mehr Seiten hätten. Und genauso (Dualität) gibt es kein Polyeder mit durchschnittlichem Eckengrad sechs oder größer.

Dazu muss man sich natürlich Beispiele ansehen und nachrechnen; dies wird in dieser Kurzfassung ausgelassen. Berechnen Sie aber für jedes der folgenden Beispiele den mittleren Eckengrad, die mittlere Seitenzahl der Flächen, und die Summe der Reziprokwerte



$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$ $\qquad$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$ $\qquad$ $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{8}{15}$.

... die jeweils knapp größer als $\frac{1}{2}$ ausfällt.

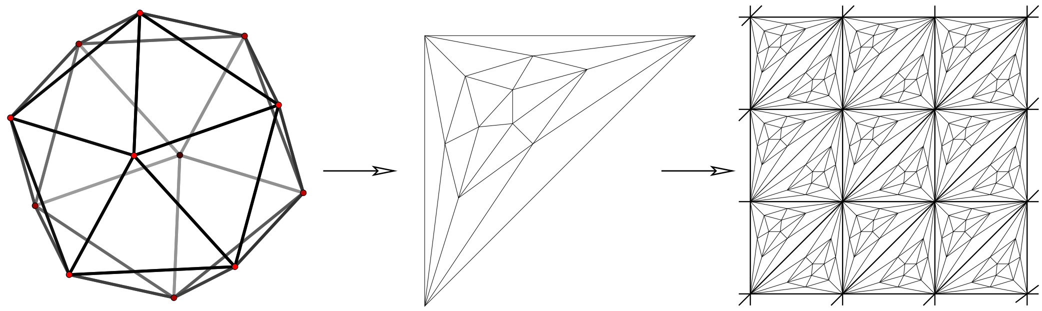
Zurück in die Ebene

Es gibt eine ganz einfache Technik, um aus (möglicherweise interessanten) 3-dimensionalen Polyedern (möglicherweise interesssante) Plasterungen der Ebene zu konstruieren. Sie soll hier nur im Bild angedeutet werden:

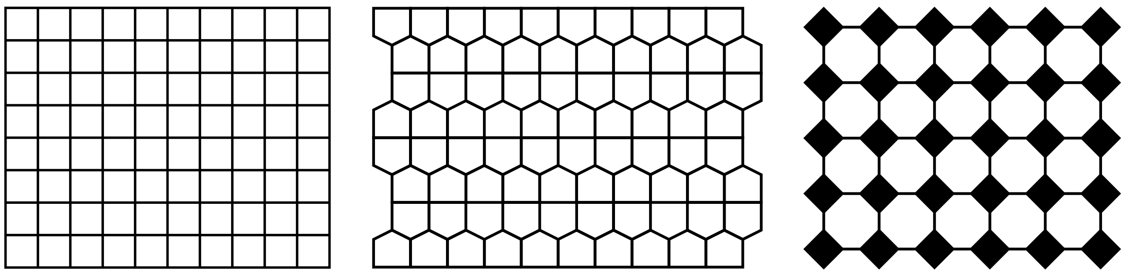
Aus dem Polyeder erzeugt man eine planare Zeichnung (entweder durch eine geeignete Camera-Obscura-artige Zentralprojektion in eine Seiten¤äche, die ein sogenanntes „Schlegel-Diagramm" ergibt), oder indem man sich durch Aufspannen von Gummibändern eine planare Zeichnung erzeugen lässt (das ist eine Idee von W. T. Tutte; siehe [16].

So entsteht aus einem Polyeder, dessen etwa Flächen im Schnitt fünf Seiten haben, eine P¤asterung der Ebene, in der die Fliesen ebenfalls im Mittel fünf Seiten haben. Und genauso — siehe unsere Illustration — erzeugt ein Polyeder wie das Ikosaeder, in dem alle Ecken Grad 5 haben, eine

P¤asterung, in der alle Eckengrade mindestens 5 sind:



Und für P¤asterungen?



$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$

Eine Euler-Formel für P¤asterungen?

Die Beispiele führen legen eine Vermutung nahe, eine „Euler-Formel für P¤asterungen der Ebene“:

$$\frac{1}{\text{mittlerer}\atop\text{Eckengrad}} + \frac{1}{\text{mittlere}\atop\text{Seitenzahl}} = \frac{1}{2}$$

woraus man genauso wie im Polyeder-Fall folgern könnte, dass für jede ebene P¤asterung gilt

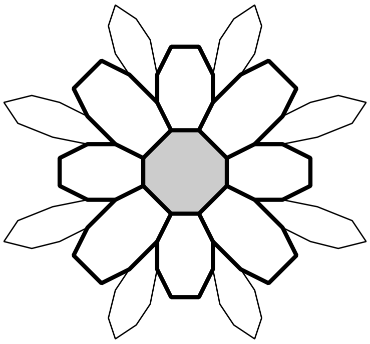
— mittlerer Eckengrad $\geq$ 3, und deshalb

— mittlere Seitenzahl $\leq$ 6. (?)

Aber wie de£niert man den „mittleren Eckengrad“ und die „mittlere Seitenzahl“?

Antwort: man muss sehr vorsichtig sein, denn P¤asterungen der Ebene mit

Achtecken gibt es eben doch, wie die Zeichnung



nahelegt: man legt einfach immer weiter P¤astersteine dazu, und erhält
mittlerer Eckengrad $= 3$
mittlere Seitenzahl $= 8$.
Die vielen wunderbaren Escher-Graphiken von P¤asterungen einer Kreisscheibe, in der die Kacheln (Engel, Teufel, Tiere) zum Rand hin immer kleiner werden, sind vom selben Typ. Sie sind insbesondere nicht **normal**:
— die Kacheln werden immer dünner und/oder länger ...
— der Inkreis wird immer kleiner und/oder der Umkreis immer größer ...
Also de£niert man *normale* P¤asterungen der Ebene, für die es eine feste obere Schranke für den Umkreisradius der P¤astersteine, und gleichzeitig eine feste untere Schranke für die Inradien aller P¤astersteine gibt. Und dann de£niert man den *mittlere Eckengrad* und die *mittlere Seitenzahl* als einen Grenzwert, und man formuliert und beweist sauber einen Euler-Satz für normale P¤asterungen der Ebene:

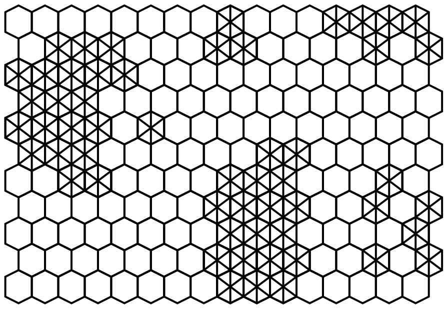
Satz. Für normale P¤asterungen der Ebene konvergiert die Summe

$$\frac{1}{\substack{\text{mittlerer}\\ \text{Eckengrad}}} + \frac{1}{\substack{\text{mittlere}\\ \text{Seitenzahl}}} \quad \longrightarrow \quad \tfrac{1}{2}$$

(auch wenn die Grenzwerte der Summanden nicht existieren!)
Die Details können hier aus Platzgründen nicht ausgeführt werden.

Damit gilt: in einer normalen P¤asterung können die P¤astersteine „im Mittel“ nicht mehr als 6 Seiten haben. Technisch: der obere Grenzwert, *limes superior*, der Seitenzahl ist höchstens sechs, auch wenn das Mittel als Grenzwert nicht existiert, was etwa in (normalen!) P¤asterungen vom

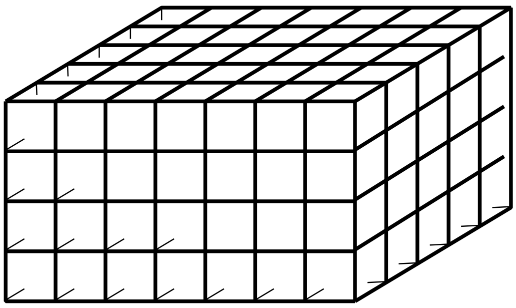
Typ



passieren kann.

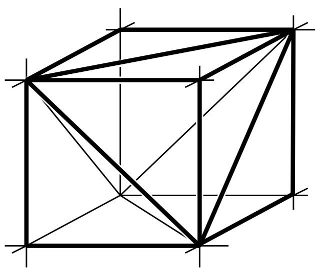
P¤asterungen im Raum

Die „Standard-P¤asterung“ des Raumes mit Würfeln



kennt man als Würfelzucker-P¤asterung. Hier liegt jede Ecke in 8 P¤astersteinen, und jeder P¤asterstein hat 8 Ecken.

Unterteilt man die Würfelzucker-P¤asterung nach dem Schema

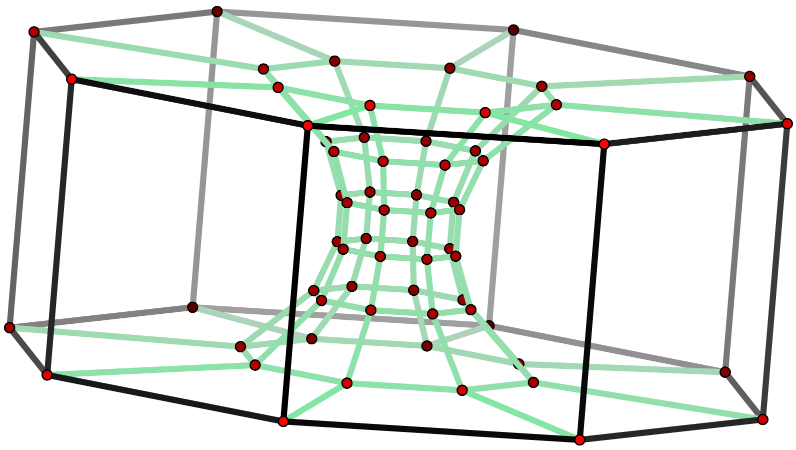


so ergibt eine P¤asterung des Raumes, in der jede Ecke in 8 oder 32 P¤astersteinen liegt (im Mittel: in 20 P¤astersteinen), und jeder P¤asterstein 4 Ecken hat (Tetraeder).

Aber: eine obere Schranke für die mittlere Eckenzahl in einer normalen P¤asterung des Raumes gibt es — im Gegensatz zum ebenen Fall — nicht. Dies sei hier nur mit einer Kon£guration von Achtecks-Prismen angedeutet, die das Programmsystem POLYMAKE [8] unter Verwendung von JavaView [15] produziert.

```
kacheln% n-gon 8eck.poly 8
kacheln% product 8eckMal8eck.poly 8eck.poly 8eck.poly
kacheln% polymake 8eckMal8eck.poly SCHLEGEL
```

Technisch ist dies eine 3-dimensionale Projektion, ein „Schlegel-Diagramm“ eines 4-dimensionalen Polytops (nämlich des Produkts von zwei Achtecken) — kommt also aus einer Konstruktion, die wir analog eine Dimension darunter durchgeführt hatten, um aus einem 3-dimensionalen Polyeder (wie dem Ikosaeder) eine P¤asterung der Ebene zu erzeugen.



Ein offenes Problem Es gibt normale P¤asterungen des Raumes in denen jeder P¤asterstein sehr viele Ecken hat — das wurde hier angedeutet.
Es gibt auch normale P¤asterungen des Raumes in denen jede Ecke in sehr vielen P¤astersteinen liegt, das lässt sich ähnlich konkret nachweisen.
Problem: *Kann man beides gleichzeitig erreichen?*

Mit krummen P¤astersteinen, geht das — aber wir betrachten nur P¤asterungen mit konvexen Polyedern, die Seite-an-Seite liegen.

Literatur

[1] M. Aigner & G. M. Ziegler: Das BUCH der Beweise, Springer-Verlag, Heidelberg 2001.

[2] B. Artmann: Euclid — The Creation of Mathematics, Springer-Verlag, New York 1999.

[3] J. Bokowski: Darstellende Geometrie für Architekten und Gewerbelehrer, `www.mathematik.tu-darmstadt.de/~bokowski/`

[4] M. Emmer & D. Schattschneider, eds.: M. C. Escher's Legacy. A Centennial Celebration, Springer-Verlag, Heidelberg 2003.

[5] D. Eppstein: Seventeen Proofs of Euler's Formula, in: *The Geometry Junkyard*, `www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/`

[6] M. C. Escher: The Magic of M. C. Escher, Harry N. Abrams, New York 2000.

[7] P. J. Federico: Descartes on Polyhedra, *Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences* **4**, Springer-Verlag, New York 1982.

[8] E. Gawrilow & M. Joswig: Polymake: A software package for analyzing convex polytopes, TU Berlin 1997-2003, `www.math.tu-berlin.de/diskregeom/polymake/`

[9] B. Grünbaum & G. C. Shephard: Tilings and Patterns, Freeman, New York 1987.

[10] T. Hales: Cannonballs and honeycombs, *Notices Amer. Math. Soc.* **97** 47 (2000), 440-449.

[11] R. Hartshorne: Geometry: Euclid and Beyond, *Undergraduate Texts in Math.*, Springer-Verlag, New York 2000.

[12] H. Hemme: Die Mathematik der Bienenwaben, in: „Mathematische Unterhaltungen“, *Spektrum Digest* 2/2002, 78-82.

[13] M. Joswig & K. Polthier, eds.: Electronic Geometry Models, `www.eg-models.de`

[14] I. Lakatos: Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery, Cambridge University Press, Cambridge 1976.

[15] K. Polthier et al.: `JavaView` visualization software, 1999-2002, TU Berlin, `www.javaview.de`

[16] J. Richter-Gebert: Realization Spaces of Polytopes, *Lecture Notes in Math.* **1643**, Springer-Verlag, Heidelberg 1996.

[17] G. Royle: Combinatorial catalogues `www.cs.uwa.edu.au/~gordon/data.html`