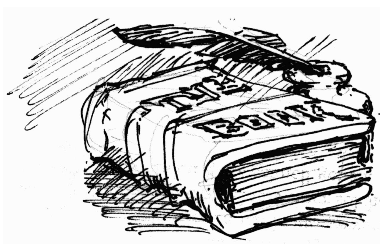
Brillanten für das „BUCH der Beweise“

Martin Aigner & Günter M. Ziegler

Das BUCH

Von dem BUCH gibt es viele verschiedene Varianten und Ausgaben. Die bekannteste Beschreibung stammt wohl von Paul Erdős, einem legendären ungarischen Mathematiker, der 1996 gestorben ist. Erdős erzählte von einem BUCH, das der liebe Gott verwaltet, und in dem die perfekten mathematischen Beweise verzeichnet sind, die brillantesten Ideen und die schönsten Geistesblitze, die zum jeweiligen Problem die ideale Lösung liefern. Erdős meinte auch, dass man als Mathematiker nicht an Gott glauben muss, aber doch an die Existenz des BUCHES.

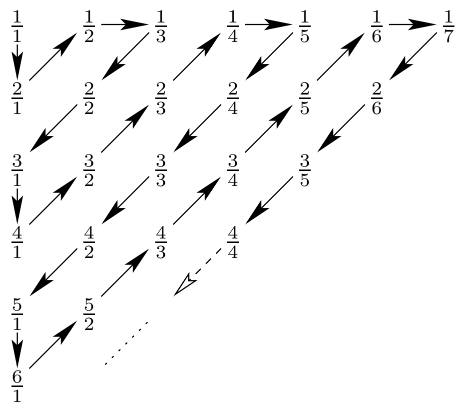


Nun liegt es in der Natur der Sache, dass wir die Beweise aus dem BUCH nicht kennen — und die sehr subjektive Auswahl von Kandidaten, die wir (auch auf Hinweise von Paul Erdős hin) in [1] veröffentlicht haben, ist weder vollständig noch perfekt. Ganz im Gegenteil: immer wieder haben wir die Freude, auf Verbesserungen hingewiesen zu werden, und auf neue, noch schönere Beweise und Beweisvarianten.

Der vorliegende Aufsatz ist damit eine Einladung zum „Arbeitsbesuch im Elfenbeinturm“, in Form einer Auswahl von (für uns) neuen Beweisen und Ideen. Was wir hier präsentieren, ist sozusagen „Rohmaterial“ für die nächste, erweiterte Auflage von „Das BUCH der Beweise“ [1], wenn sie je kommen sollte. Schon jetzt gilt: das sind hübsche Ideen und Beobachtungen, sie haben uns Freude gemacht — und wir versuchen sie deshalb hiermit weiterzugeben.

1. Besser als Cantor

Die (positiven) rationalen Zahlen sind bekanntlich abzählbar: wir können sie nämlich in der Reihenfolge angeben, die durch das folgende Schema vorgeschlagen wird — wobei wir *Duplikate*, also Zahlen, die schon einmal vorgekommen sind, auslassen:



Damit erhalten wir die Auflistung

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cancel{\tfrac{2}{2}}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cancel{\tfrac{2}{4}}, \cancel{\tfrac{3}{3}}, \cancel{\tfrac{4}{2}}, \frac{5}{1}, \ldots$$

Aber es geht doch schöner, systematischer, und ohne Duplikate — den Hinweis auf die folgenden Ideen, aus einer Arbeit von Neil Calkin and Herb Wilf [3], verdanken wir Anders Björner (KTH Stockholm).

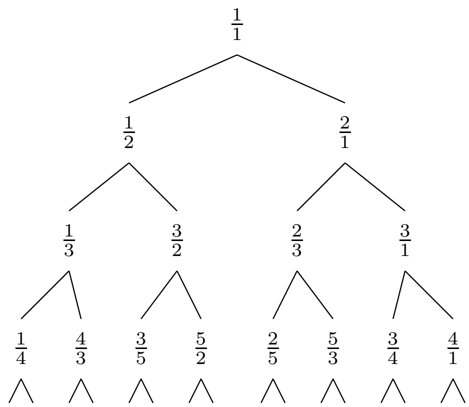
Unsere neue Liste beginnt folgendermaßen:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \ldots$$

Es fällt auf, dass hier der Nenner jeder Zahl gleich dem Zähler der darauf folgenden Zahl ist. Mit anderen Worten: die n-te Zahl ist der Bruch $\frac{b(n)}{b(n+1)}$ (für $n \geq 0$), wobei $\big(b(n)\big)_{n\geq 0}$ eine Folge ist mit dem Anfang

$$(1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, \ldots)\,.$$

Wie kommen wir nun zu dieser Liste? Dazu betrachten wir den folgenden unendlichen binären Baum:



Das Bildungsgesetz ist sofort abzulesen:

- $\frac{1}{1}$ steht in der Spitze des Baumes.
- Jeder Knoten $\frac{i}{j}$ hat zwei Nachfolger: der linke ist $\frac{i}{i+j}$ und der rechte ist $\frac{i+j}{j}$.

Die folgenden Bedingungen sind nun ganz leicht nachzuprüfen:

1. *Jeder Bruch $\frac{i}{j}$ im Baum ist gekürzt, das heißt i und j sind relativ prim.*

Dies gilt offensichtlich für die Spitze $\frac{1}{1}$, und nun machen wir Induktion nach unten, also nach der „Tiefe" im Baum. Sind i und j relativ prim, so sicherlich auch $\frac{i}{i+j}$ und $\frac{i+j}{j}$.

2. *Jeder gekürzte Bruch kommt im Baum vor.*

Angenommen dies ist falsch, dann nehmen wir unter allen Brüchen $\frac{r}{s}$, die nicht vorkommen, einen mit kleinster Summe $r+s$ von Zähler und Nenner. Falls $r > s$ ist, so kommt aufgrund unserer Annahme $\frac{r-s}{s}$ im Baum vor, aber $\frac{r}{s}$ ist der rechte Nachfolger von $\frac{r-s}{s}$, also kommt $\frac{r}{s}$ doch vor. Und falls $r < s$ ist, so kommt $\frac{r}{s-r}$ vor, und $\frac{r}{s}$ ist der linke Nachfolger von $\frac{r}{s-r}$. Es bleibt also $r = s$, also $\frac{r}{s} = \frac{1}{1}$, und dieser Bruch steht in der Spitze des Baumes.

(Man mag auch beobachten, dass die Zuordnung $\frac{r}{s} \leftrightarrow \frac{s}{r}$ der Spiegelung des Baumes an seiner Symmetrieachse entspricht. Also hätte man sich auf die Betrachtung eines der beiden Fälle $r > s$ und $s > r$ beschränken können ...)

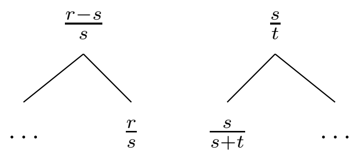
3. *Jeder gekürzte Bruch tritt genau einmal im Baum auf.*

Wir argumentieren wie eben. Sei $\frac{r}{s}$ ein gekürzter Bruch, der mehr als einmal vorkommt, mit minimalem $r+s$. Falls $r > s$ ist, so ist $\frac{r}{s}$ rechter Nachfolger von zwei verschiedenen Knoten, aber diese sind jeweils mit $\frac{r-s}{s}$ bezeichnet, was nach unserer Annahme der Minimalität widerspricht. Und falls $r < s$ ist, so sind die beiden Vorgänger $\frac{r}{s-r}$. Es bleibt der Fall $r = s$, $\frac{r}{s} = \frac{1}{1}$. Aber $\frac{1}{1}$ kann nur in der Spitze auftreten, da jeder andere Knoten von der Form $\frac{i}{i+j}$ bzw. $\frac{i+j}{j}$ ist, also verschieden von 1.

Jede positive rationale Zahl kommt also genau einmal vor, und wir schreiben sie nun in der natürlichsten Form auf: Schicht für Schicht, beginnend mit der Spitze, und innerhalb jeder Schicht von links nach rechts. Dies ergibt genau die Liste, deren Anfang wir oben hingeschrieben haben.

4. *Der Nenner der n-ten Zahl in unserer Liste ist gleich dem Zähler der $(n+1)$-sten Zahl.*

Dies gilt sicherlich für $n = 0$, und falls die n-te Zahl linker Nachfolger eines Knoten ist. Sei nun die n-te Zahl $\frac{r}{s}$ rechter Nachfolger. Falls $\frac{r}{s}$ am rechten Rand des Baumes liegt, so ist $s = 1$ nach dem Bildungsgesetz, und die $(n+1)$-ste Zahl liegt am linken Rand, hat also Zähler 1. Ist schließlich $\frac{r}{s}$ im „Inneren“ des Baumes, so ist wie gesehen $\frac{r-s}{s}$ der Vorgänger im Baum. Nach Induktion folgt auf $\frac{r-s}{s}$ in der Liste ein Bruch der Form $\frac{s}{t}$, also folgt auf $\frac{r}{s}$ der Bruch $\frac{s}{s+t}$:



Unsere Liste ist somit, wie angekündigt, von der Form $\left(\frac{f(n)}{f(n+1)}\right)_{n\geq 0}$. Es bleibt noch die naheliegende Frage, ob die Folge $\big(f(n)\big)$ „vernünftig“ beschrieben werden kann. Dazu sehen wir uns einen Knoten und seine beiden Nachfolger an. Der n-te Knoten $\frac{f(n)}{f(n+1)}$ hat als Nachfolger $\frac{f(2n+1)}{f(2n+2)}$ bzw. $\frac{f(2n+2)}{f(2n+3)}$. Nach unserem Bildungsgesetz des Baumes bedeutet dies

$$\begin{aligned} &f(2n+1) = f(n) \quad \text{und} \\ &f(2n+2) = f(n) + f(n+1) \end{aligned}$$

für $n \geq 0$.

Mit der Anfangsbedingung $f(0) = 1$ ist die Folge $\big(f(n)\big)$ damit vollständig beschrieben. Aber was noch schöner ist: Die Rekursion liefert auch eine direkte Interpretation der $f(n)$.

Wir wissen, dass jede Zahl n sich in eindeutiger Weise als Summe von verschiedenen Zweierpotenzen darstellen lässt — dies ist die übliche Binärdarstellung. Eine *Hyper-Binärdarstellung* ist eine Darstellung von n als Summe von Zweierpotenzen, in der jede Potenz höchstens zweimal auftritt. Im allgemeinen wird es nun mehrere solche Darstellungen geben. Zum Beispiel

$$\begin{aligned} &1 = 1, \\ &2 = 2 = 1+1, \\ &3 = 2+1, \\ &4 = 4 = 2+2 = 2+1+1, \\ &5 = 4+1 = 2+2+1, \\ &6 = 4+2 = 4+1+1 = 2+2+1+1. \end{aligned}$$

Es sei $b(n)$ die Anzahl dieser Hyper-Binärdarstellungen mit $b(0) = 1$. Man überprüft nun leicht, dass die Folge $\big(b(n)\big)$ genau dieselbe Rekursion wie $\big(f(n)\big)$ erfüllt — also haben wir $b(n) = f(n)$ für alle n, und unsere Analyse führt zu folgendem Ergebnis: Sei $\frac{r}{s}$ ein beliebiger gekürzter Bruch, dann gibt es genau ein n mit $r = b(n)$ und $s = b(n+1)$.

Damit sind wir am Ende — aber eigentlich geht es jetzt erst richtig los: Gibt es noch andere Folgen $\big(f(n)\big)$, die eine natürliche Interpretation haben, mit derselben Eigenschaft wie die Folge $\big(b(n)\big)$?

2. e^4 ist irrational

Die Euler'sche Zahl $e = 2{,}7182818284... = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots$ ist irrational — und der Beweis dafür ist klassisch und ganz einfach: Wäre nämlich $e = \frac{a}{b}$, für ganze Zahlen a und $b > 0$, so müsste

$$n!be \;=\; n!a$$

gelten, für *jedes* $n \geq 0$. Das kann aber nicht sein, weil auf der rechten Seite eine ganze Zahl steht, während sich die linke Seite mit

$$e = \Big(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n!}\Big)+\Big(\frac{1}{(n+1)!}+\ldots\Big)$$

zerlegt in einen ganzzahligen Teil

$$bn!\Big(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n!}\Big)$$

und in einen Teil

$$b\Big(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\Big),$$

von dem man leicht sieht, dass er *ungefähr* $\frac{b}{n}$ ist, also für große n eben nicht ganzzahlig sein kann: genauer, er ist größer als $\frac{b}{n+1}$ und kleiner als $\frac{b}{n-1}$, wie man aus dem Vergleich mit einer geometrischen Reihe sieht:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} \quad < \quad & \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots \\ < \quad & \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ \dots \\ = \quad & \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Der multipliziere–mit–$n!$–Trick (für beliebiges, großes n) ist hübsch, aber er führt anscheinend nicht weit — in [1] hatten wir behauptet, er reiche nicht einmal aus, um auch nur zu zeigen, dass e^2 irrational ist. Das ist eine stärkere Aussage: $\sqrt{2}$ ist ein Beispiel einer Zahl, die irrational ist, ihr Quadrat aber nicht. Es ist *bekannt*, aber eben nicht *elementar*, dass e sogar „transzendent" ist, also inbesondere keine Potenz e^k rational sein kann. Das hat Charles Hermite 1873 bewiesen — das entsprechende, viel schwierigere Resultat für die Kreiszahl π hat der „Münchner" Ferdinand Lindemann 1882 erzielt.

Der irische Mathematiker John Cosgrave hat uns aber darauf hingewiesen, dass man mit zwei hübschen Ideen/Beobachtungen (nennen wir sie „Tricks") doch zwei Schritte weiter kommen kann: jeder der Tricks reicht aus, um die Irrationalität von e^2 zu zeigen, die Kombination beider ergibt auch, dass e^4 irrational ist. Der erste Trick ist ganz klassisch: er stammt von einem weiteren Giganten der Zahlentheorie, Carl Ludwig Siegel (1896–1981), und findet sich gleich auf Seite 3 seines Buches [5]. Der zweite Trick ist neu, von Cosgrave selbst [4].

Warum ist e^2 irrational? Was folgt aus $e^2 = \frac{a}{b}$? Laut Siegel sollten wir nicht $be^2 = a$ schreiben, sondern

$$be \ = \ ae^{-1},$$

die Reihenentwicklungen von

$$e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\dots$$

und

$$e^{-1} = 1-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\pm\dots$$

einsetzen, und wieder mit $n!$ multiplizieren, für ein hinreichend großes n. Dann sehen wir, dass $n!be$ fast ganzzahlig ist:

$$n!b\Big(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n!}\Big)$$

ist eine ganze Zahl, und der Rest

$$n!b\Big(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\dots\Big)$$

ist ungefähr $\frac{b}{n}$. Gleichzeitig ist $n!ae^{-1}$ fast ganzzahlig: wir erhalten ganzzahlige Summanden, und dann einen Rest

$$(-1)^{n+1}n!a\Big(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\pm\dots\Big),$$

und der ist ungefähr $(-1)^{n+1}\frac{a}{n}$. Und das kann nicht sein: denn für großes gerades n folgt, dass a und b unterschiedliches Vorzeichen haben, also $e^2 = \frac{a}{b} < 0$.

Um nun zu zeigen, dass e^4 irrational ist, nehmen wir ganz mutig an, dass $e^4 = \frac{a}{b}$ rational wäre, und schreiben das als

$$be^2 \ = \ ae^{-2}.$$

Wir könnten nun mit großem $n!$ multiplizieren, die nicht-ganzzahligen Summanden einsammeln; aber das bringt nichts: die Summe der restlichen Terme wird links ungefähr $b\frac{2^{n+1}}{n+1}$ sein, rechts $(-1)^{n+1}a\frac{2^{n+1}}{n+1}$, beides wird für große n also sehr groß sein.

Also, so Cosgrave, muss man genauer hinschauen, und zwei kleine Strategieänderungen vornehmen: erstens nehmen wir nicht *irgendein* großes n, sondern eine große Zweierpotenz $n = 2^m$; und zweitens multiplizieren wir nicht mit $n!$, sondern mit $\frac{n!}{2^{n-1}}$.

Dann brauchen wir eine kleine Hilfsaussage, die aus dem Satz von Legendre [1, S. 9] folgt: für eine Zahl $n \geq 1$ enthält $n!$ den Primfaktor 2 höchstens $n-1$ mal — mit Gleichheit dann (und nur dann), wenn n eine Zweierpotenz ist, $n = 2^m$. Die Hilfsaussage ist auch nicht schwer zu zeigen: $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ der Faktoren von $n!$ sind gerade, $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ von ihnen sind durch 4 teilbar, usw.: Wenn 2^r die größte Zweierpotenz bezeichnet, die $2^r \leq n$ erfüllt, so enthält $n!$ den Primfaktor 2 also genau

$$\begin{aligned} &\Big\lfloor \frac{n}{2} \Big\rfloor + \Big\lfloor \frac{n}{4} \Big\rfloor + \ldots + \Big\lfloor \frac{n}{2^r} \Big\rfloor \\ &\leq \quad \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \ldots + \frac{n}{2^r} \\ &= \quad n\Big(1 - \frac{1}{2^r}\Big) \ \leq \ n-1 \end{aligned}$$

mal, mit Gleichheit in beiden Ungleichungen genau für $n = 2^r$.

Zurück zu $be^2 = ae^{-2}$. Wir betrachten also

$$b\frac{n!}{2^{n-1}}e^2 = a\frac{n!}{2^{n-1}}e^{-2}, \qquad (1)$$

und setzen die Reihenentwicklungen

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1} + \frac{4}{2} + \ldots + \frac{2^r}{r!} + \ldots$$

und

$$e^{-2} = 1 - \frac{2}{1} + \frac{4}{2} \mp \ldots + (-1)^r\frac{2^r}{r!} + \ldots$$

ein. Für $r \leq n$ erhalten wir auf beiden Seiten ganzzahlige Summanden, nämlich

$$b\frac{n!}{2^{n-1}}\frac{2^r}{r!} \quad \text{bzw.} \quad (-1)^r a\frac{n!}{2^{n-1}}\frac{2^r}{r!},$$

wobei $r!$ für $r > 0$ den Primfaktor 2 *höchstens* $r-1$ mal enthält, $n!$ aber *genau* $n-1$ mal. (Für $r > 0$ sind die Summanden also sogar gerade.)

Und die Reihen, die man für $r \geq n+1$ erhält, sind für gerades n (wir haben ja $n = 2^m$ angenommen)

$$2b\Big(\frac{2}{n+1} + \frac{4}{(n+1)(n+2)} + \ldots\Big)$$

bzw.

$$2a\Big(-\frac{2}{n+1} + \frac{4}{(n+1)(n+2)} \mp \ldots\Big),$$

die für große Zweierpotenzen ungefähr $\frac{4b}{n}$ bzw. $-\frac{4a}{n}$ sind (wie man durch Vergleich mit geometrischen Reihen leicht sieht). Für großes $n = 2^m$ heißt das aber, dass die linke Seite von (1) ein *bisschen* größer als eine ganze Zahl ist, die rechte Seite ein *bisschen* kleiner — Widerspruch!

3. Langsam abkühlen

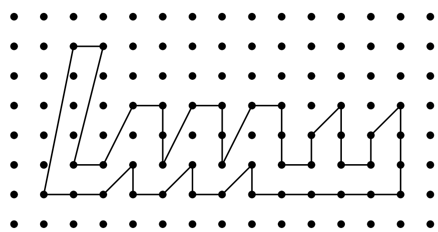
Georg Pick, 1859 geboren, war ab 1888 Professor in Prag; mit 80 Jahren wurde er als Jude ins Ghetto Theresienstadt deportiert und starb dort 1942. Ihm verdanken wir den wunderbaren Gitterpunktsatz: dass wir die Fläche eines Gitterpolygons einfach durch Zählen der Gitterpunkte auf dem Rand und im Inneren bestimmen können.

Der Satz von Pick. *Die Fläche jedes (nicht notwendigerweise konvexen) ebenen Polygons Q mit ganzzahligen Ecken ist*

$$A(Q) \quad = \quad n_{\mathsf{in}} + \tfrac{1}{2}n_{\mathsf{rand}} - 1,$$

wobei n_{in} und n_{rand} die Anzahlen der ganzzahligen Punkte im Inneren bzw. auf dem Rand von Q sind.

Dabei nehmen wir an, dass wir es mit einem *einfachen* Gitterpolygon zu tun haben, das also keine Löcher hat, und von einer einzigen, geschlossenen und sich nicht selbst überschneidenden Kurve begrenzt ist — obwohl sich die Pick'sche Formel leicht auf allgemeinere Fälle erweitern lässt.

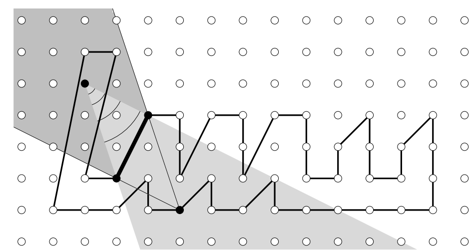


Beispiel: Hier ist $n_{\mathsf{in}} = 6$ und $n_{\mathsf{rand}} = 42$, also $A(Q_{\mathsf{lmu}}) = 26$.

Den Satz von Pick *kann* man beweisen, indem man das Polygon mit Hilfe der ganzzahligen Punkte auf seinem Rand und im Inneren in minimale Gitterdreiecke (der Fläche $\frac{1}{2}$) zerlegt, und dann die Euler'sche Polyederformel anwendet. Das ist ganz klassisch, und so steht's auch in [1]. Man *muss* aber nicht: Christian Blatter [2] von der ETH Zürich hat einen ganz anderen, „physikalischen" Beweis vorgeschlagen, wie folgt.

Wir nehmen an, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ in jedem ganzzahligen Punkt genau die Wärmemenge 1 konzentriert ist. Mit wachsendem t breiten sich diese Wärmespitzen unabhängig voneinander radial und rotationssymmetrisch aus, und im Grenzwert $t \to \infty$ ist die ganze vorhandene Wärme gleichmäßig in der Ebene verteilt. Da genau eine Einheit Wärme pro Flächeneinheit zur Verfügung steht, ist die im Grenzwert in dem Polygon Q befindliche Wärmemenge gleich dem Flächeninhalt von Q.

Wo kommt die Wärme her? Wir überlegen uns, dass das Gitter der ganzzahligen Punkte bezüglich jedes Kantenmittelpunkts symmetrisch ist (dieser ist ein Punkt mit ganzzahligen oder halbzahligen Koordinaten) — und deshalb fließt über jede Kante gleich viel Wärme in beide Richtungen. Netto gibt es also keinen Wärmefluss in das Polygon hinein oder aus dem Polygon heraus.



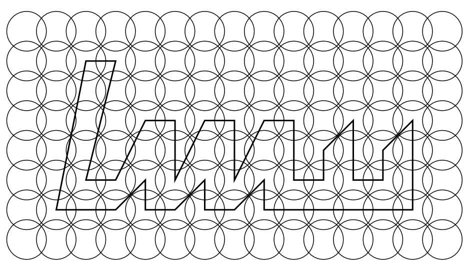
Die Wärmemenge im Polygon können wir also einerseits den inneren Punkten zuordnen (eine Einheit pro innerem Punkt), andererseits den Gitterpunkten auf dem Rand des Polygons, die jeweils einen Anteil des Vollwinkels nach innen „abstrahlen", der ihrem Innenwinkel entspricht. Um die Summe dieser Innenwinkel zu berechnen, laufen wir einmal den Rand des Polygons ab (im Gegenuhrzeigersinn, mit dem Inneren des Polygons zur Linken) und stellen fest, dass die Abstrahlung von einem Gitterpunkt, in Anteilen eines Vollwinkels gemessen, jeweils genau

$$\tfrac{1}{2} - \text{Richtungsänderung}$$

beträgt. Im Gesamtumlauf heißt das also: die Wärmemenge, die vom Rand kommt, ist $\frac{1}{2}$ mal die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand, minus Richtungsänderung während des Umlaufs, und die macht genau einen Vollwinkel aus. Ende des Beweises!

Nun gibt es sicher Leser, die solche Beweise analytischer lieben: Ja, man *kann* durchaus die Wärmeleitungsgleichung für diese Situation aufstellen und lösen, was eine hübsche analytische Übungsaufgabe darstellt, man *muss* aber nicht. Und es ist für den Beweis auch überhaupt nicht wichtig, dass sich die Wärme so verteilt, wie das die Wärmeleitungsgleichung diktiert. Für den Beweis ist nur entscheidend, dass von jedem Gitterpunkt aus dieselbe endliche Menge „Wärme“ oder „Energie“ oder „Masse“ so *rotationssymmetrisch* auf die Ebene verteilt wird, dass am Ende eine *Gleichverteilung* herauskommt. Das stellt also eine Korrespondenz her zwischen der Ebene und den Gitterpunkten.

Um dies zu demonstrieren, skizzieren wir hier noch eine alternative Beschreibung des Beweises. (Uns würde interessieren, ob unsere Leser dies besser finden — oder nicht!) Dafür stellen wir uns vor, dass sich in jedem Gitterpunkt ein zylinderförmiger Pudding des Volumens 1 befindet, der langsam zerläuft, so dass wir es zum Zeitpunkt t mit einem Zylinder des Radius $r(t) = t$ und der Höhe $h(t) = \frac{1}{\pi t^2}$ zu tun haben.



Zu einem Zeitpunkt ε mit $0 < \varepsilon \ll \frac{1}{2}$ sind die Zylinder alle disjunkt, über jedem Gitterpunkt im Inneren von Q steht ein Zylinder, der ganz im Polygon enthalten ist, und über jedem Rand-Gitterpunkt steht ein Zylinder, von dem ein dem Innenwinkel entsprechendes Kuchenstück über dem Polygon-Inneren steht. (Die kleinen schwarzen Kreisscheiben in unserem ersten Bild könnten die Grundflächen der Zylinder angeben.) Wenn nun die Zylinder zerfließen, und sehr viel Zeit vergangen ist (also t sehr groß geworden ist), dann überdeckt jeder Zylinder die große Fläche $t^2\pi$, und jeder Punkt der Ebene wird von *ungefähr* $t^2\pi$ Zylindern der Höhe $\frac{1}{\pi t^2}$ überdeckt (weil nämlich die Kreisscheibe mit großem Radius t ungefähr $t^2\pi$ Gitterpunkte enthält). Also wird die Gesamtüberdeckung mit fortschreitender Zeit immer gleichmäßiger und nähert sich der Höhe 1.

Und dann fragen wir uns wieder, woher denn das Volumen stammt, das für $t \to \infty$ das Polygon gleichmäßig überdeckt ...

Literatur

[1] M. Aigner und G. M. Ziegler, *Das BUCH der Beweise*, Springer-Verlag, Heidelberg Berlin, 2002.

[2] C. Blatter, *Another proof of Pick's area theorem*, Math. Magazine **70** (1997), p. 200.

[3] N. Calkin and H. S. Wilf, *Recounting the rationals*, Amer. Math. Monthly **107** (2000), pp. 360–363.

[4] J. B. Cosgrave, *New proofs of the irrationality of e^2 and e^4*, Amer. Math. Monthly, to appear.

[5] C. L. Siegel, *Transcendental Numbers*, Annals of Math. Studies, Vol. 16, Princeton University Press, 1949.

Prof. **Martin Aigner**
Institut für Mathematik II
FU Berlin, Arnimallee 3
14195 Berlin
aigner@math.fu-berlin.de

Prof. **Günter M. Ziegler**
Institut für Mathematik, MA 6-2
TU Berlin, Str. des 17. Juni 136
10623 Berlin
ziegler@math.tu-berlin.de
www.math.tu-berlin.de/~ziegler