# 8. ÜBUNG ZUR MENGENLEHRE

*Sabine Koppelberg*
*Ausgabe: 8. 12. 2011*
*Besprechung am 15. 12. 2011*

**Aufgabe 29.** $X$ eine beliebige Menge. Eine Mengenfamilie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt von endlichem Charakter, wenn für jedes $U \subseteq X$ gilt:

$$U \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \text{für jedes endliche } e \subseteq U \text{ ist } e \in \mathcal{A}.$$

Tukeys Lemma ist die Aussage

**(TL)** Jede Familie endlichen Charakters hat ein maximales Element (bezüglich der mengentheoretischen Inklusion).

Zeigen Sie, dass TL, in ZF, zum Zornschen Lemma äquivalent ist, und erklären Sie, wie der Basisexistenzsatz der Linearen Algebra aus Tukeys Lemma folgt. (Dieser Beweis des Basisexistenzsatzes scheint mir natürlicher als der übliche mit Zorns Lemma.)

**Aufgabe 30.** Beweisen Sie die folgenden Teile aus Satz 12.1 der Vorlesung, für Kardinalzahlen $\kappa, \lambda, \mu$. Dabei soll nur die Definition der Kardinalzahlmultiplikation benutzt werden, nicht Satz 12.3.

(a) $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$
(b) $\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu$
(c) aus $\kappa \leq \kappa'$ und $\lambda \leq \lambda'$ folgt $\kappa^\lambda \leq {\kappa'}^{\lambda'}$.

**Aufgabe 31.** $I$ und, für $i \in I$, $X_i$ seien Mengen mit $|I| = \kappa$ und $|X_i| \leq \lambda$. Zeigen Sie, dass dann $|\bigcup_{i \in I} X_i| \leq \kappa \cdot \lambda$ gilt. Wo geht in den Beweis das Auswahlaxiom AC ein?

Eine abschließende Aufgabe zur Aufgabenserie 8, 12, 16, 24, 28.

**Aufgabe 32.** Wir betrachten die Aussage

**(E)** Jede Menge ist endlich.

(a) Zeigen Sie, dass aus E, in ZF, das Auswahlaxiom AC folgt.
(b) In dem Modell $\mathcal{M}$ aus Aufgabe 8 usw. gilt E, und deshalb AC.