7. ÜBUNG ZUR MENGENLEHRE

Sabine Koppelberg
Ausgabe: 1. 12. 2011
Besprechung am 8. 12. 2011

Hier befassen wir uns i.W. mit dem Auswahlaxiom. Dies werden wir im nächsten Blatt noch etwas fortsetzen.

Aufgabe 25. $(G, \cdot, e)$ sei eine Gruppe und a ein Element von G mit $a \neq e$. Beweisen Sie mit Hilfe des Zornschen Lemmas, dass es eine maximale Untergruppe H von G mit $a \notin H$ gibt.

Aufgabe 26. Das axiom of dependent choices (DC) und das abzählbare Auswahlaxiom (AC_ω) sind die folgenden Aussagen.
(DC) Ist a eine nichtleere Menge, $R \subseteq a \times a$ und existiert für jedes $x \in a$ ein $y \in a$ mit yRx, so gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \omega}$ in a mit $x_{n+1} E x_n$ für $n \in \omega$.
(AC_ω) Jede Familie $(X_i)_{i \in I}$ mit abzählbarem I und nichtleeren Mengen X_i hat eine Auswahlfunktion.

Zeigen Sie:
(a) DC folgt, in ZF, aus dem Auswahlxiom AC
(b) aus DC folgt, in ZF, AC_ω
(c) in ZF + DC ist die Umkehrung von 9.1 beweisbar: ist X Menge und $E \subseteq X \times X$ ohne unendliche absteigende E-Kette, so ist E fundiert auf X.

Aufgabe 27. Skizzieren Sie die Beweise der beiden folgenden Sätze der Analysis. Inwieweit geht dabei das Auswahlaxiom bzw. seine Konsequenzen aus Aufgabe 26 ein?
(a) Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ ist gleichmäßig stetig.
(b) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, und p liege im Abschluss von A (d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in A$ mit $|p - x| < \varepsilon$). Dann gibt es eine Folge in A, die gegen p konvergiert.

Wir beenden hier die Aufgabenserie 8, 12, 16, 24.

Aufgabe 28. Zeigen Sie, dass die Strukturen $\mathcal{M}$ aus Aufgabe 8 und $(V_\omega, \in_{V_\omega})$ isomorph sind.