5. ÜBUNG ZUR MENGENLEHRE

Sabine Koppelberg
Ausgabe: 17. 11. 2011
Besprechung am 24. 11. 2011

Aufgabe 17. Zeigen Sie, dass je zwei Strukturen der Form $(M, a, ^*)$, in denen die Peano-Axiome (P1) bis (P5) aus Kapitel 8 des Skripts gelten, isomorph sind.

Anleitung: Zeigen Sie, dass jede solche Struktur $(M, a, ^*)$ zu $(\mathbb{N}, 0, ')$ isomorph ist, indem Sie durch Induktion über die (uns bekannte) Wohlordnung $<$ auf $\mathbb{N}$ den gewünschten Isomorphismus $f : \mathbb{N} \to M$ definieren. Der Beweis lässt sich auch ohne Kenntnis von $\mathbb{N}$ und seiner Wohlordnung führen, wird dann aber sehr mühsam.

Aufgabe 18. Eine Menge e heißt endlich, wenn sie zu einer natürlichen Zahl n gleichmächtig ist; n ist dann die Mächtigkeit von e. Zeigen Sie die folgenden Aussagen, zweckmäßigerweise durch Induktion uber die Mächtigkeit der beteiligten Mengen.

(a) Jede Teilmenge einer endlichen Menge ist endlich
(b) die Vereinigung zweier endlichen Mengen ist endlich
(c) sind I und für jedes $i \in I$ die Menge e_i endlich, so ist die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} e_i$ endlich
(d) das cartesische Produkt zweier endlicher Mengen ist endlich
(e) die Potenzmenge einer endlichen Menge ist endlich.

Aufgabe 19. Auf der Klasse *Ord* aller Ordinalzahlen definieren wir induktiv die Operationen $+$ und $\cdot$ durch

$$\alpha + 0 = \alpha, \quad \alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1, \quad \alpha + \lambda = \sup_{\nu < \lambda} (\alpha + \nu) \text{ für Limeszahlen } \lambda,$$
$$\alpha \cdot 0 = 0, \quad \alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha, \quad \alpha \cdot \lambda = \sup_{\nu < \lambda} \alpha \cdot \nu \text{ für Limeszahlen } \lambda.$$

Diese Summen- bzw. Produktbildung lässt sich folgendermaßen interpretieren.

Für jede wohlgeordnete Menge $(x, <)$ (kurz x geschrieben) sei der Ordnungstyp $\operatorname{otp}(x)$von $(x, <)$ das Mostowski-Bild von $(x, <)$, d.h. die Ordinalzahl α, so dass $(\alpha, \in_\alpha)$ zu $(x, <)$ isomorph ist. Und aus den Aufgaben 10 und 11 ist bekannt, dass für zwei wohlgeordnete (und disjunkte) Mengen die Vereinigung und das cartesische Produkt auf kanonische Weise wohlgeordnet sind.

Nun seien $\alpha, \beta \in Ord$ und x, y (disjunkte) wohlgeordnete Mengen mit $\operatorname{otp}(x) = \alpha$, $\operatorname{otp}(y) = \beta$. Zeigen Sie, dass dann $\operatorname{otp}(x \cup y) = \alpha + \beta$ und $\operatorname{otp}(y \times x) = \alpha \cdot \beta$ ist.

Aufgabe 20. Beweisen Sie unter Benutzung von Aufgabe 19, dass die Operationen $+$ und $\cdot$ auf *Ord* assoziativ, aber nicht kommutativ sind.